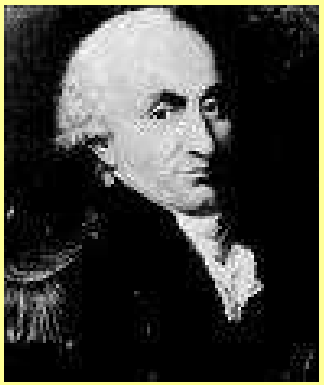
Ergänzungen zu Grundlagen der Elektrotechnik WS 07/08

LV-Nummer:	0420 L 120
Umfang:	2 SWS
Ort:	HE101
Zeit:	Donnerstags 16-18Uhr letzte VL dieses Jahr: 20. Dezember 2007 erste VL nächstes Jahr: 10. Januar 2008
Dozent / Betreuer:	Rayk Grune EN 176, Tel. 24544, *rayk.grune@iee.tu-berlin.de*
Bewertung:	Klausur → Informationen http://www.iee.tu-berlin.de/lehre/service/... get_labor/veranstaltungs_info.html *Hinweise zur Veranstaltung -> 9. Klausuren WS(07/08)*
VL-Link:	www.iee.tu-berlin.de → Service → Ergänzungen zu Grundlagen der Elektrotechnik (Service Diplom)

Inhalt der VL

Netzwerkanalyse
Brückenschaltungen
Elektrische Felder
Magnetkreis
Maxwellsche Gleichungen
Wechselstromtechnik
Ortskurven
Bodediagramm
Ausgleichsvorgänge
Filter
Messtechnik und Sensorik
Diode
Bipolartransistor
Operationsverstärker
Vierpol
Signale und Systeme
Fourier- und Laplace-Transformation



Charles Coulomb

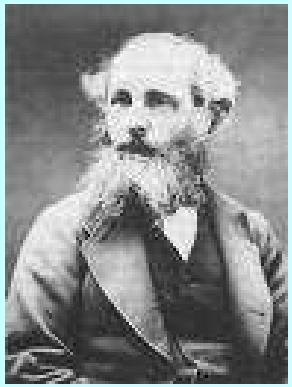
1785

Beschreibung der Kraft auf zwei Ladungsträger

James Clerk Maxwell

1864

Formulierung der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes



Michael Faraday

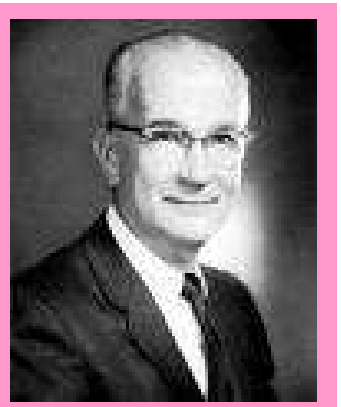
1831

Entdeckung der elektromagnetischen Induktion

William Shockley

1947

Entdeckung des Transistors



Peter Grünberg

1988 Entdeckung des Riesenmagneto-Widerstandseffekts
1997 Erste Festplatte von IBM nutzt den GMR-Effekt
(heute: 90 Prozent aller Festplatten)
2007 Physik-Nobelpreis gemeinsam mit Albert Fert

Quelle:
http://www.wdr.de/themen/wissen/forschung/forscherland_nrw/gruenberg/index.jhtml#sw02

Was ist **Strom**?

Definition:

Elektrischer Strom ist die gerichtete Bewegung von elektrischen Ladungsträgern.

Stromstärke:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Einfach vorzustellen

Was ist **Spannung**?

Definition:

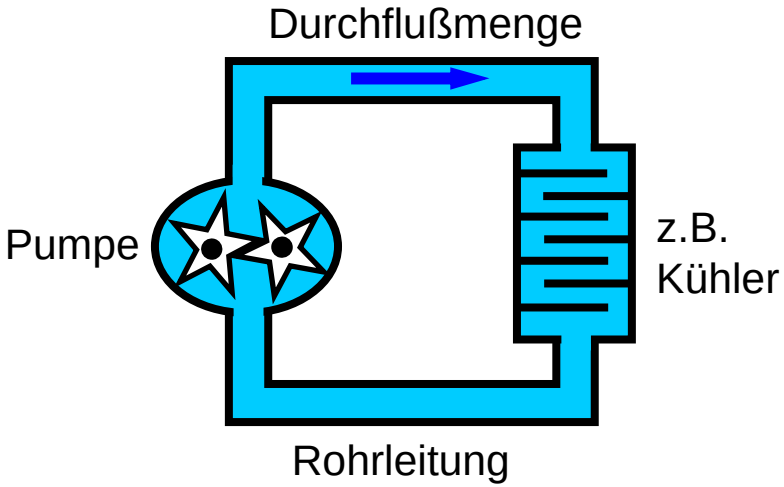
Elektrische Spannung ist der Quotient aus der zur Verschiebung einer Ladung erforderlichen Arbeit und dieser Ladung.

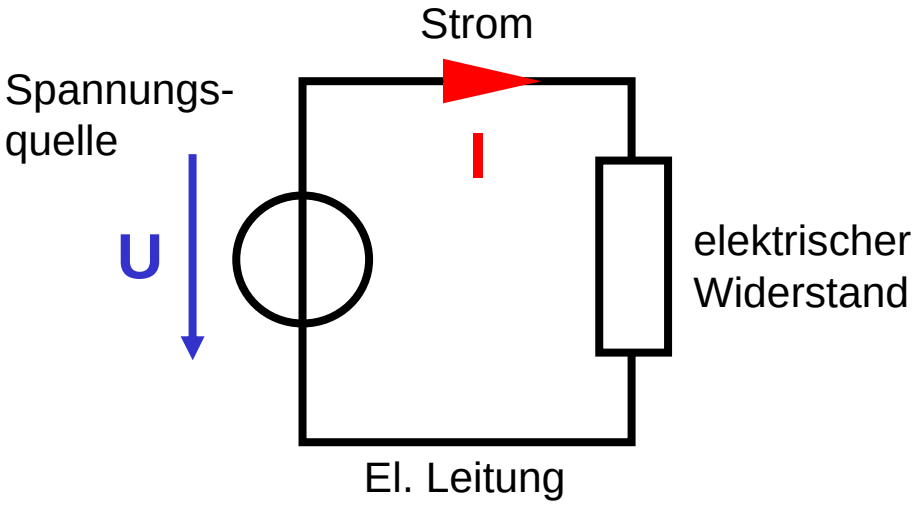
$$U_{12} = \frac{W_{12}}{Q}$$

Nicht so leicht vorzustellen

Strom & Spannung - Einfache Vorstellung

Vergleich mit Wasserleitung				
Spannung	U	⇨	Druck	p
Strom	I	⇨	Volumenstrom	$\dot{V}$





Ohmsches Gesetz

Wasserleitung	Elektrische Schaltung
Je größer der Druck auf der Leitung, desto mehr Wasser fließt hindurch.	Je größer die Spannung U am Widerstand R, desto größer der Strom I.
Genauere Beschreibung durch Bernoullische Energiegleichung	

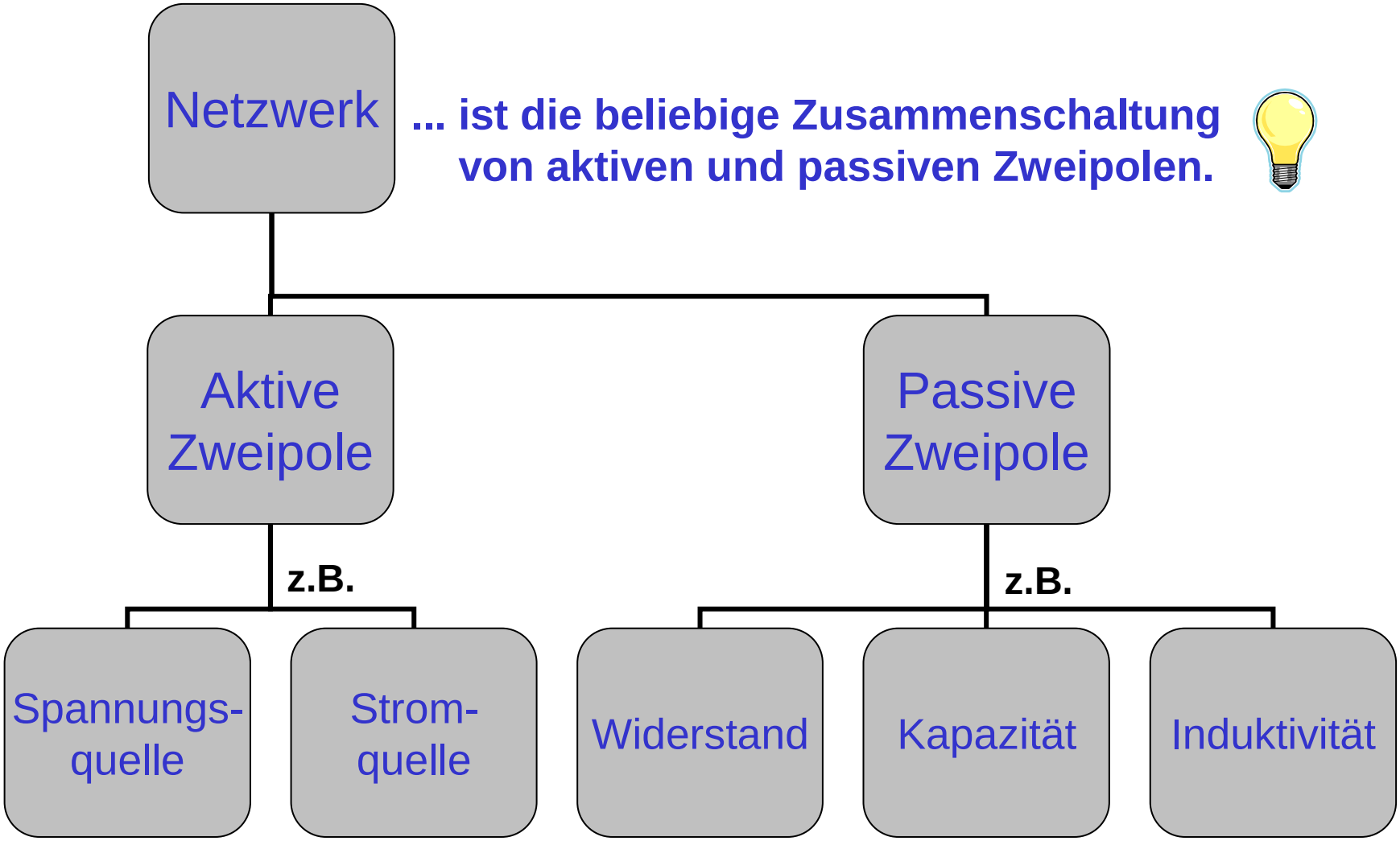
$$U = R \cdot I$$

Elektrische Leistung

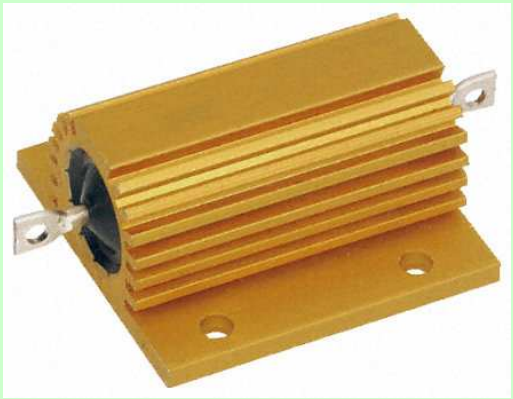
Angenommen eine Probeladung Q bewegt sich in einem elektrischen Feld. Welche Leistung verrichtet sie?

Definition		
Spannung	Strom	Leistung
$U_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$	$P = \frac{W}{t} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$

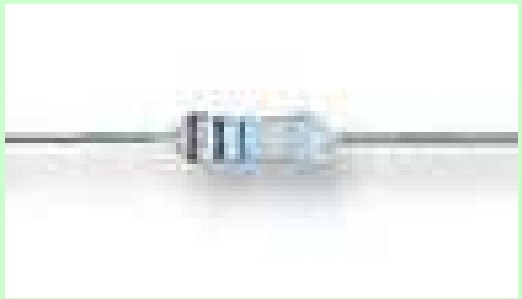
$$P = U \cdot I$$


Netzwerk
... ist die beliebige Zusammenschaltung von aktiven und passiven Zweipolen.
Aktive Zweipole
Passive Zweipole
z.B.
z.B.
Spannungs-quelle
Strom-quelle
Widerstand
Kapazität
Induktivität

Widerstände



Leistungswiderstand



Metallschichtwiderstand

Kondensatoren

Elektrolytkondensator

Keramikkondensator

Spulen

Drosselspule axial

Drosselspule

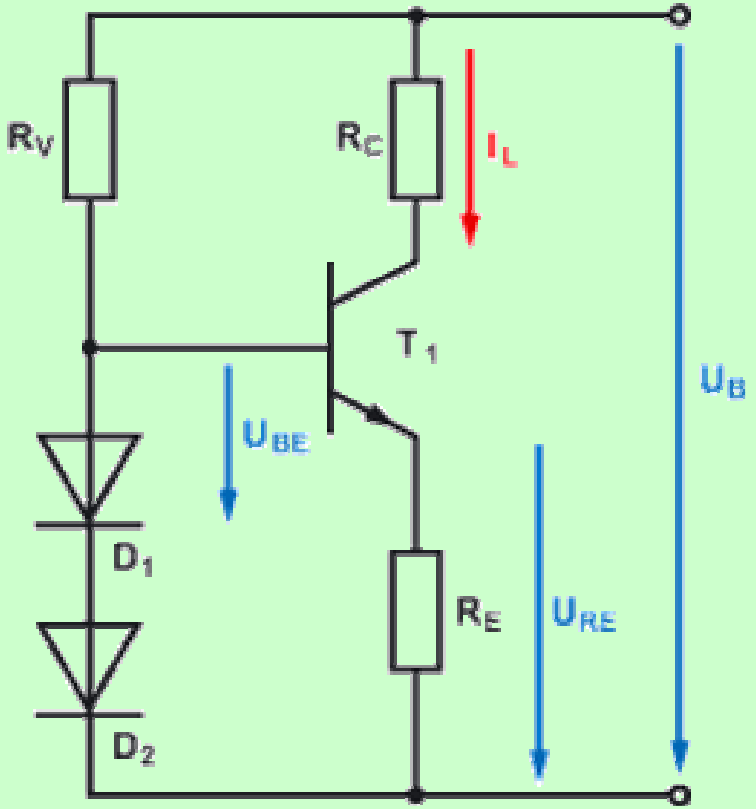
Spannungsquellen

Elektrochemisch - Bleiakku

Elektromagnetisch - Generator

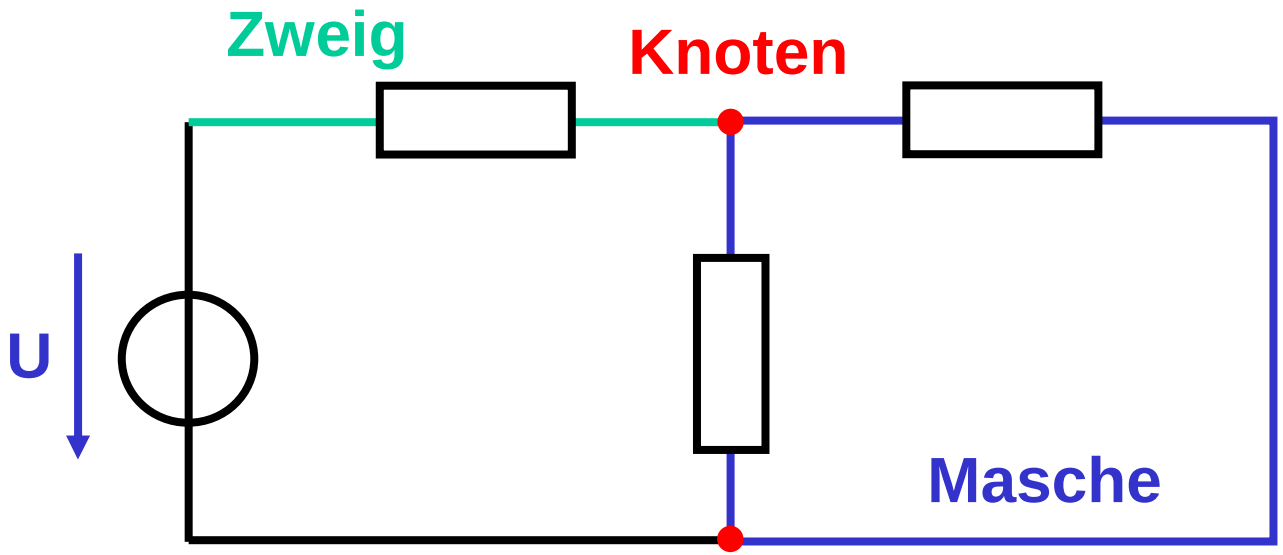
Stromquellen

Hinter jeder technischen Stromquelle verbirgt sich eine Spannungsquelle



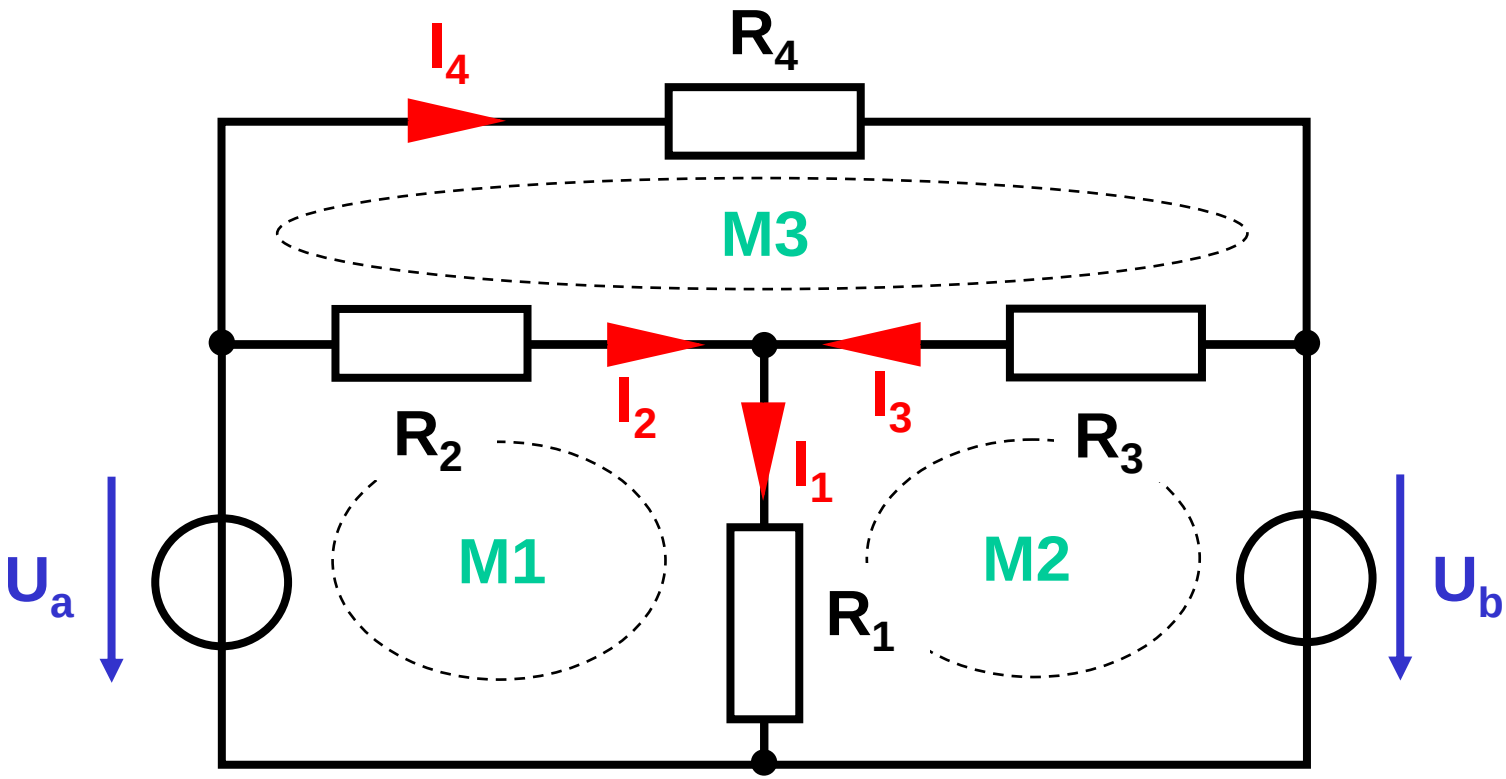
Transistor als Konstantstromquelle

Komponenten eines Netzwerks



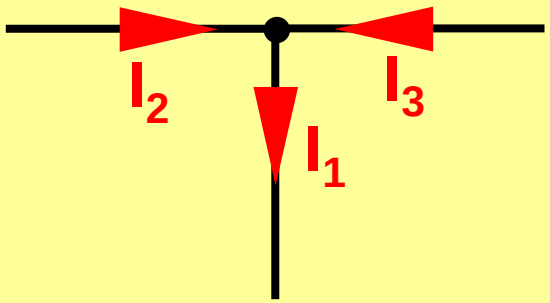
Knoten:	Verbindungspunkt mehrerer Zweige
Zweig:	Kette von Zweipolen, in denen der selbe Strom fließt
Masche:	geschlossene Kette von Zweigen, welche sich selbst nicht schneidet

Netzwerk – Bsp.



Kirchhoffsche Gesetze

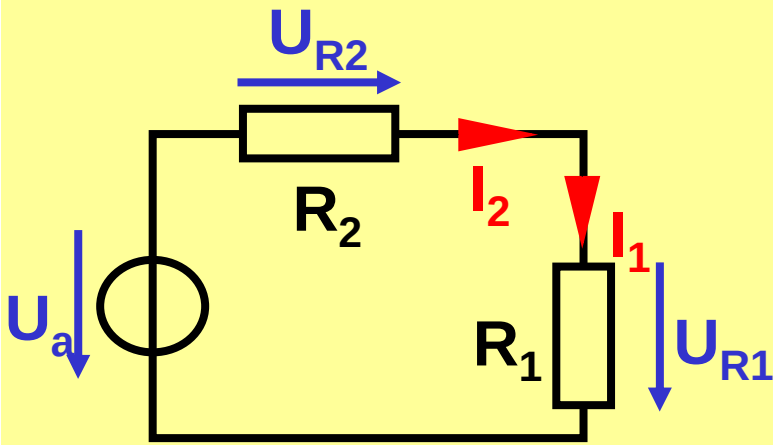
1. Knotenregel



$I_2 + I_3 - I_1 = 0$

$$\sum I_k = 0$$

2. Maschenregel



$U_a - U_{R2} - U_{R1} = 0$

$$\sum U_k = 0$$

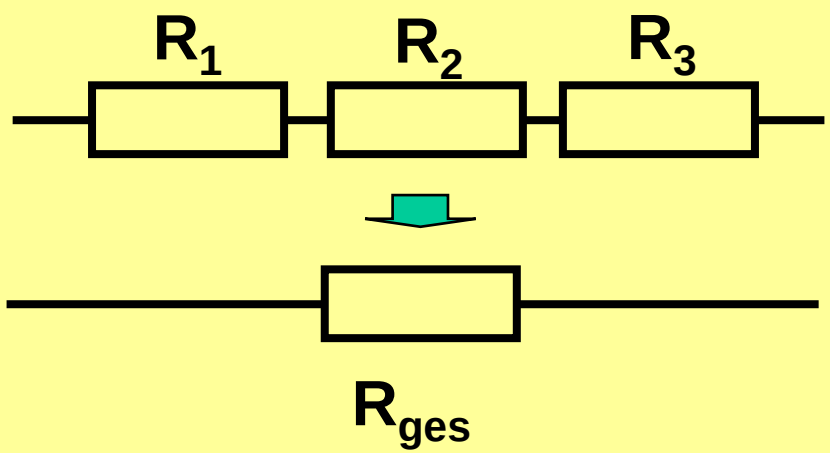
Ergänzungen zu Grundlagen der Elektrotechnik WS 07/08

Vorlesungsfolien

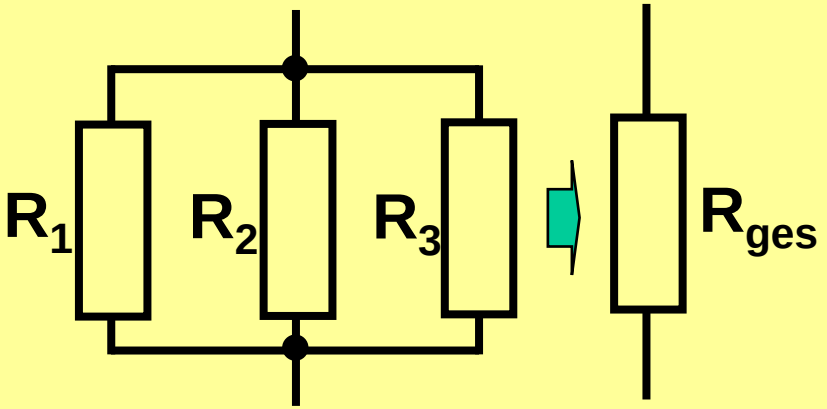
Link zur Vorlesung:	**www.iee.tu-berlin.de** → Service
Benutzername:	glet_service
Passwort:	1let_2ervic3

Schaltung von Widerständen

Reihenschaltung



Parallelschaltung

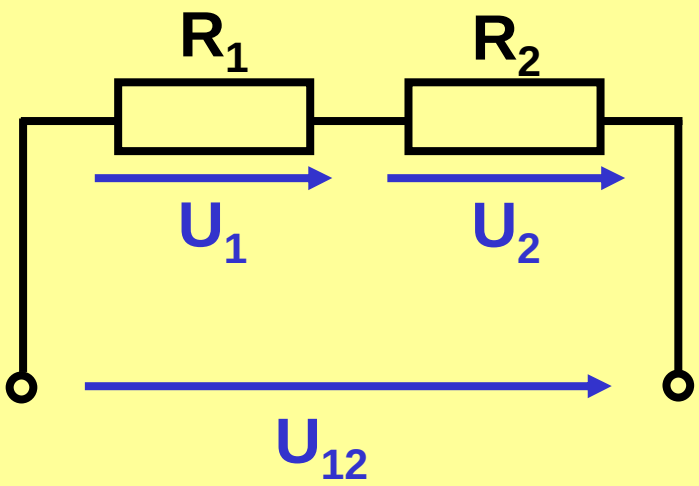


$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

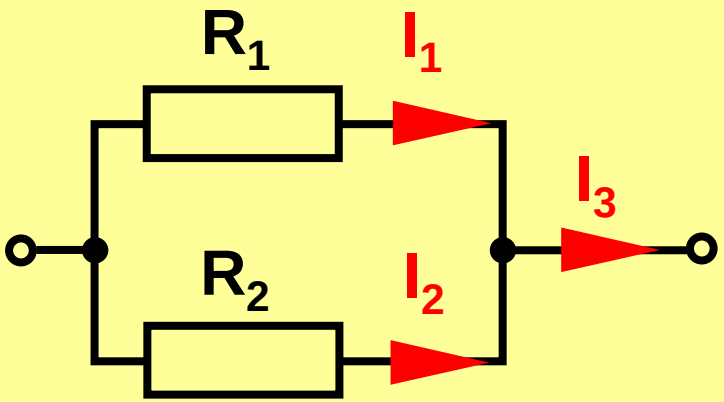
Spannungs- und Stromteiler

Spannungsteiler



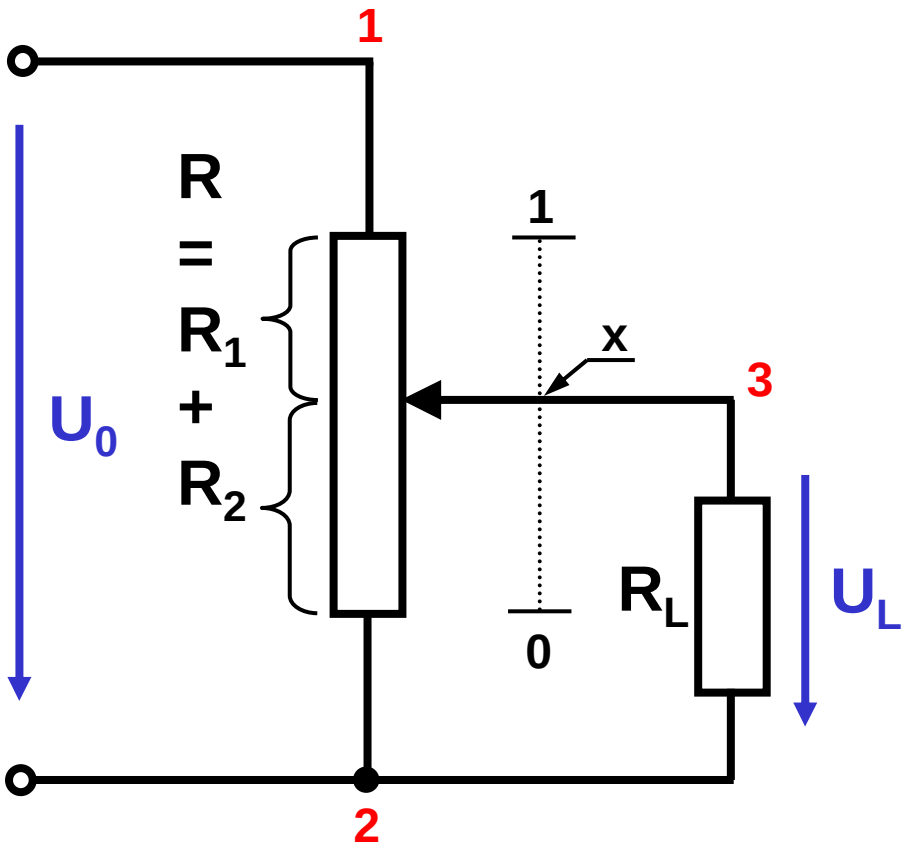
$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2}$$

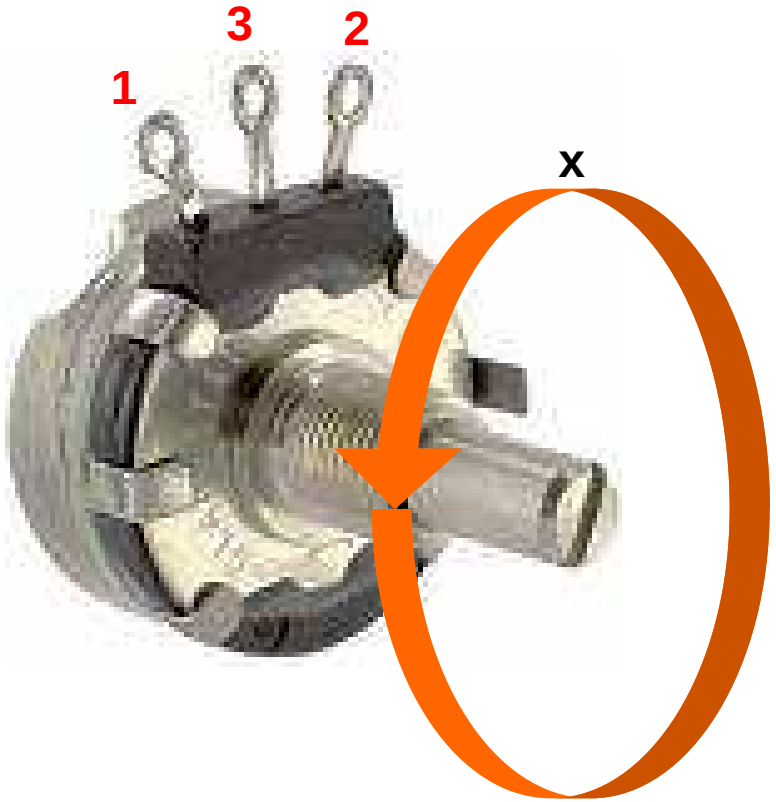
Stromteiler



$$\frac{I_1}{R_2} = \frac{I_2}{R_1}$$

Potentiometer



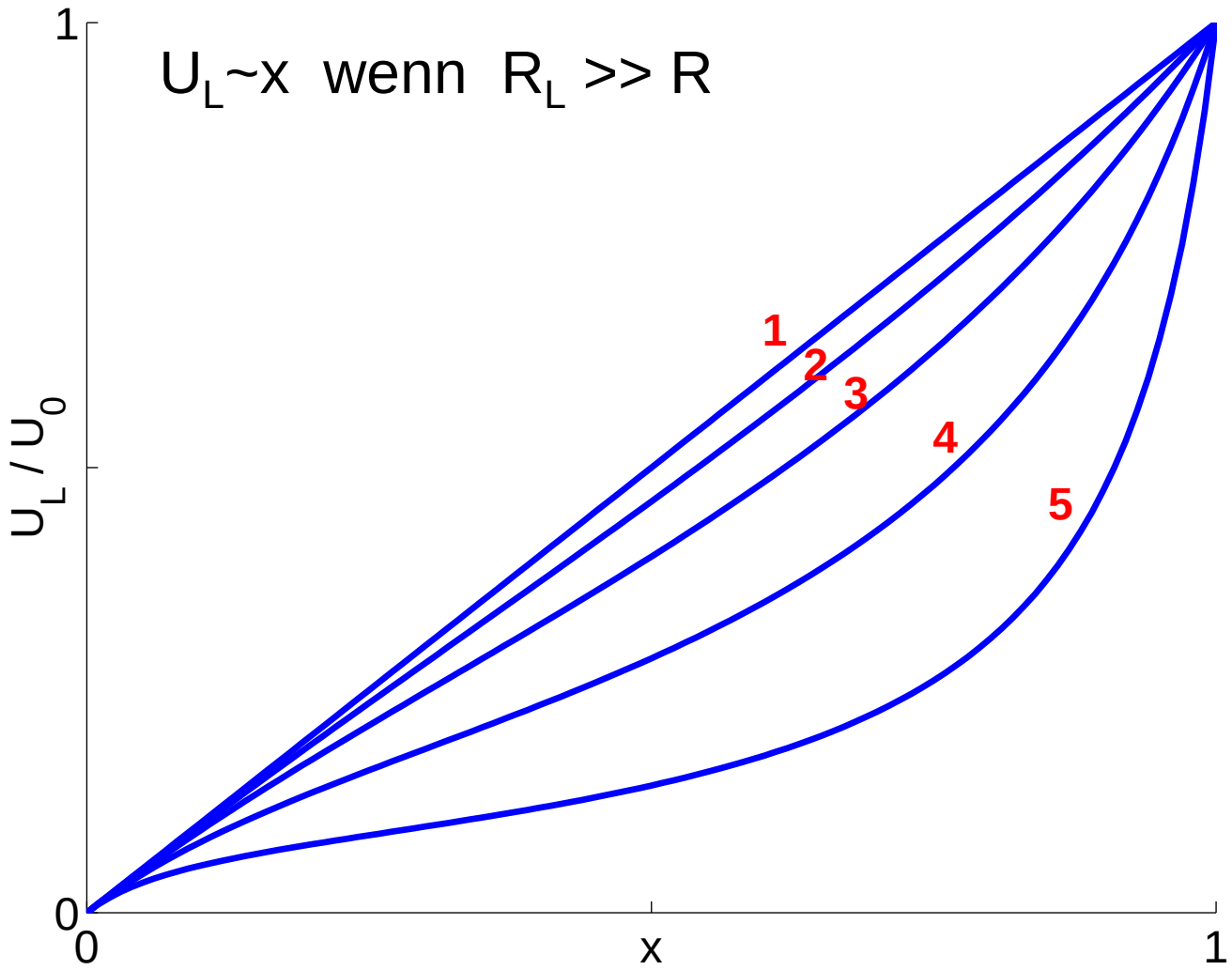


Potentiometer - Aufgabe

1. Bestimmen Sie die Spannung U_L an dem mit R_L belasteten Schleifer in Abhängigkeit seiner Position x.
2. Wie ist R zu wählen, damit $U_L(x)$ möglichst linear wird?

$$\frac{U_L}{U_0} = \frac{x}{x(1-x)\frac{R}{R_L}+1}$$

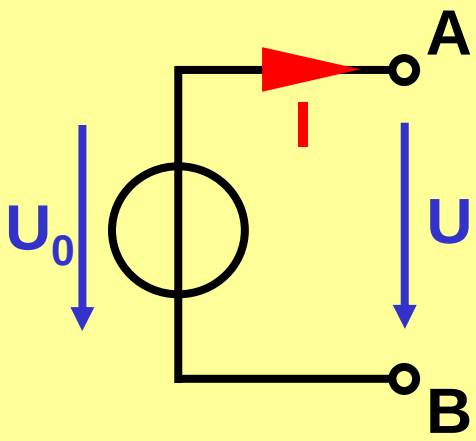
R möglichst klein gegenüber R_L



	$\frac{R}{R_L}$
1	0.0
2	0.33
3	1.0
4	3.0
5	10.0

Ideale und technische Spannungsquellen

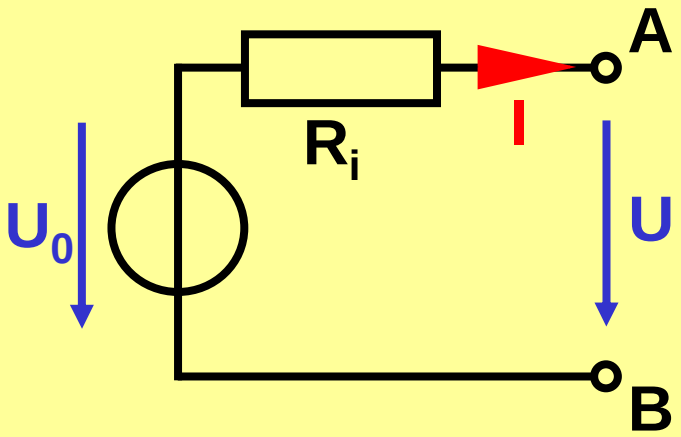
Ideale Spannungsquelle



U immer konstant U_0

I beliebig groß

Reale Spannungsquelle

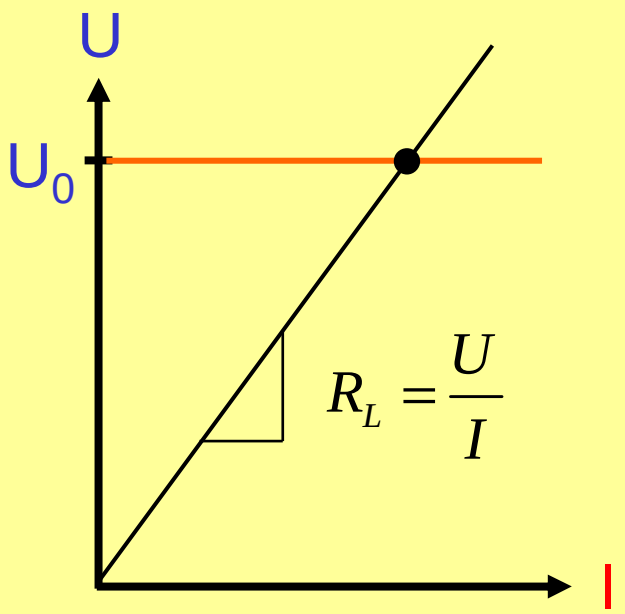


U hat Maximalwert U_0 im Leerlauf

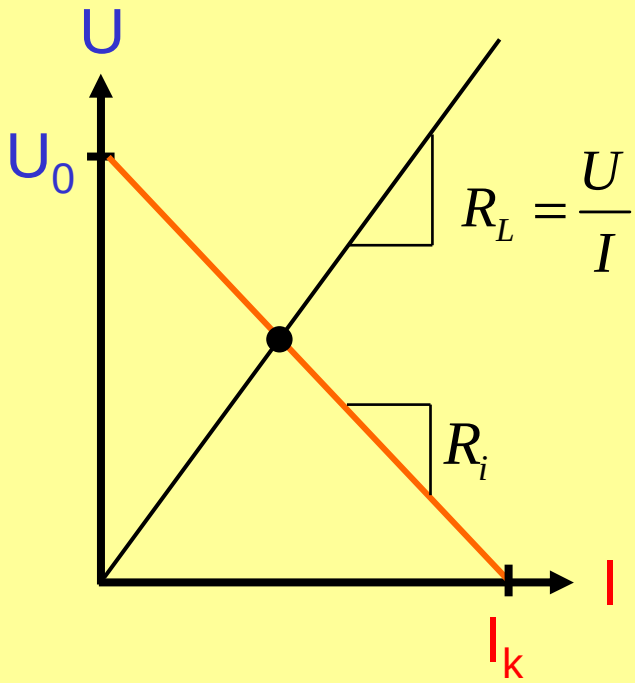
I hat Maximalwert U_0/R_i im Kurzschluss

Spannungsquellen - Quellenkennlinie

Ideale Spannungsquelle

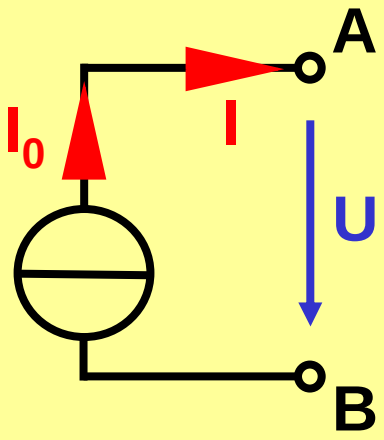


Reale Spannungsquelle



Ideale und technische Stromquellen

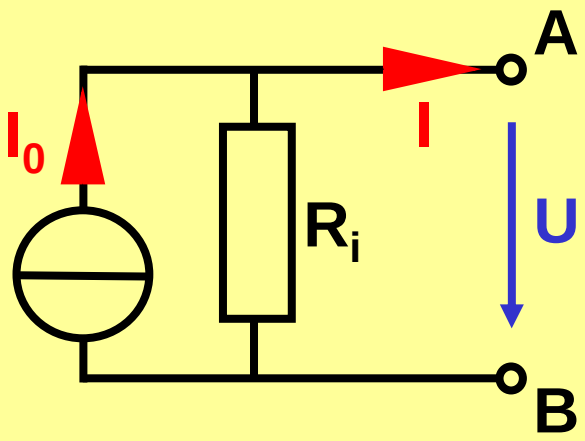
Ideale Stromquelle



U beliebig groß

I immer konstant I_0

Reale Stromquelle

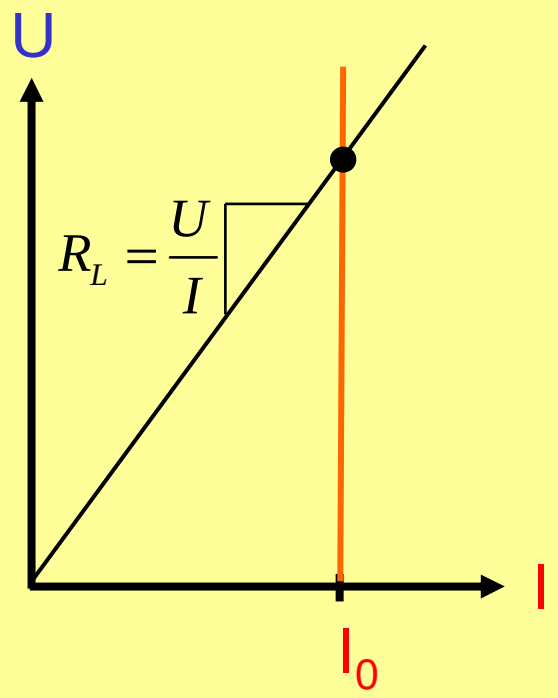


U hat Maximalwert $R_i \bullet I_0$ im Leerlauf

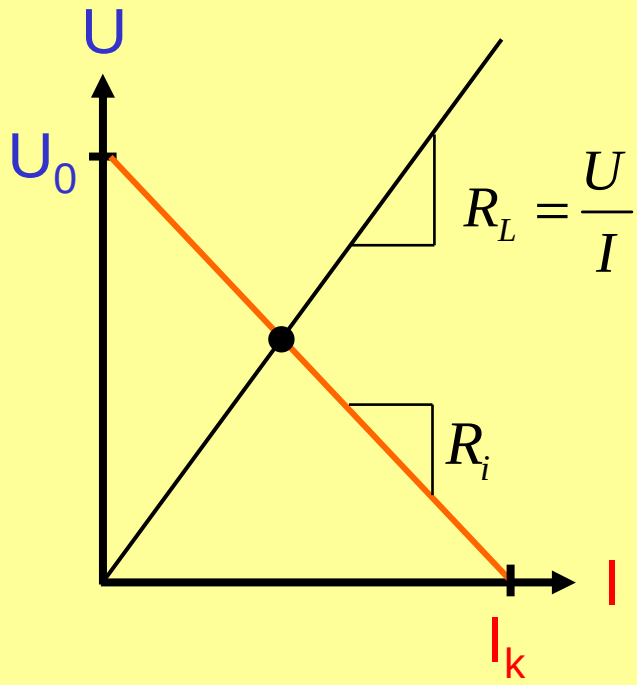
I hat Maximalwert $I_k = I_0$ im Kurzschluss

Stromquellen - Quellenkennlinie

Ideale Stromquelle

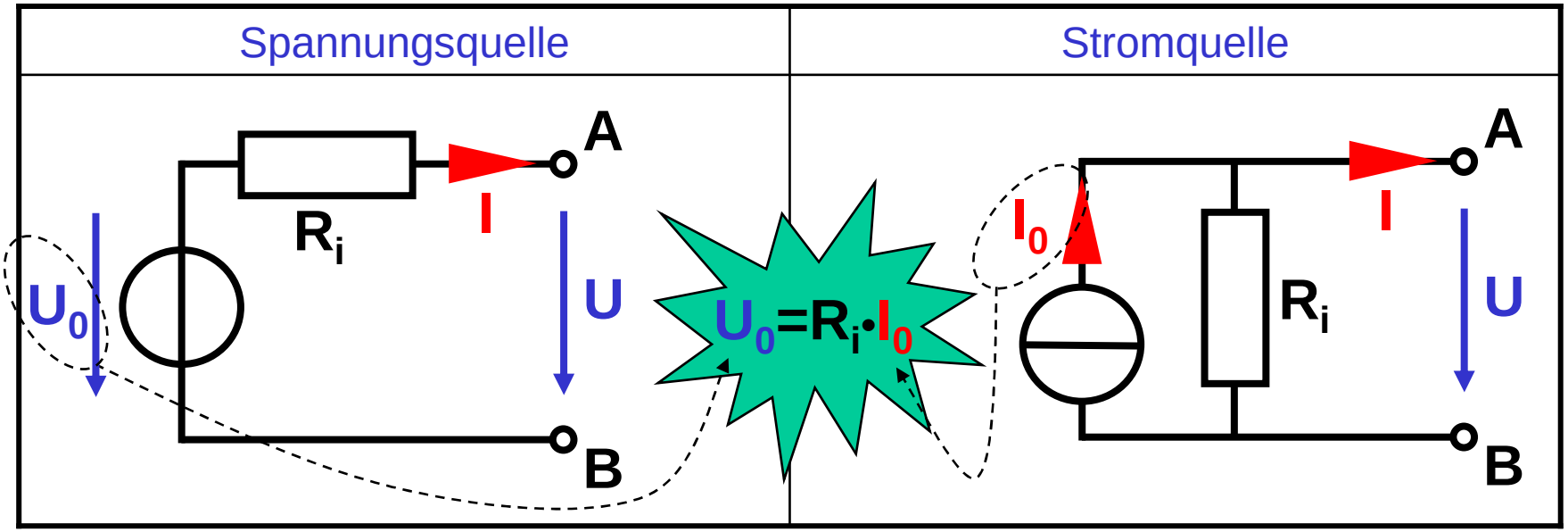


Reale Stromquelle



Dualitätsprinzip

Die Kennlinien von beliebigen Spannungs- und Stromquellen sind in ihrer Form ähnlich. Daher läßt sich jede Spannungsquelle in eine Stromquelle mit identischem Verhalten umwandeln und umgekehrt.



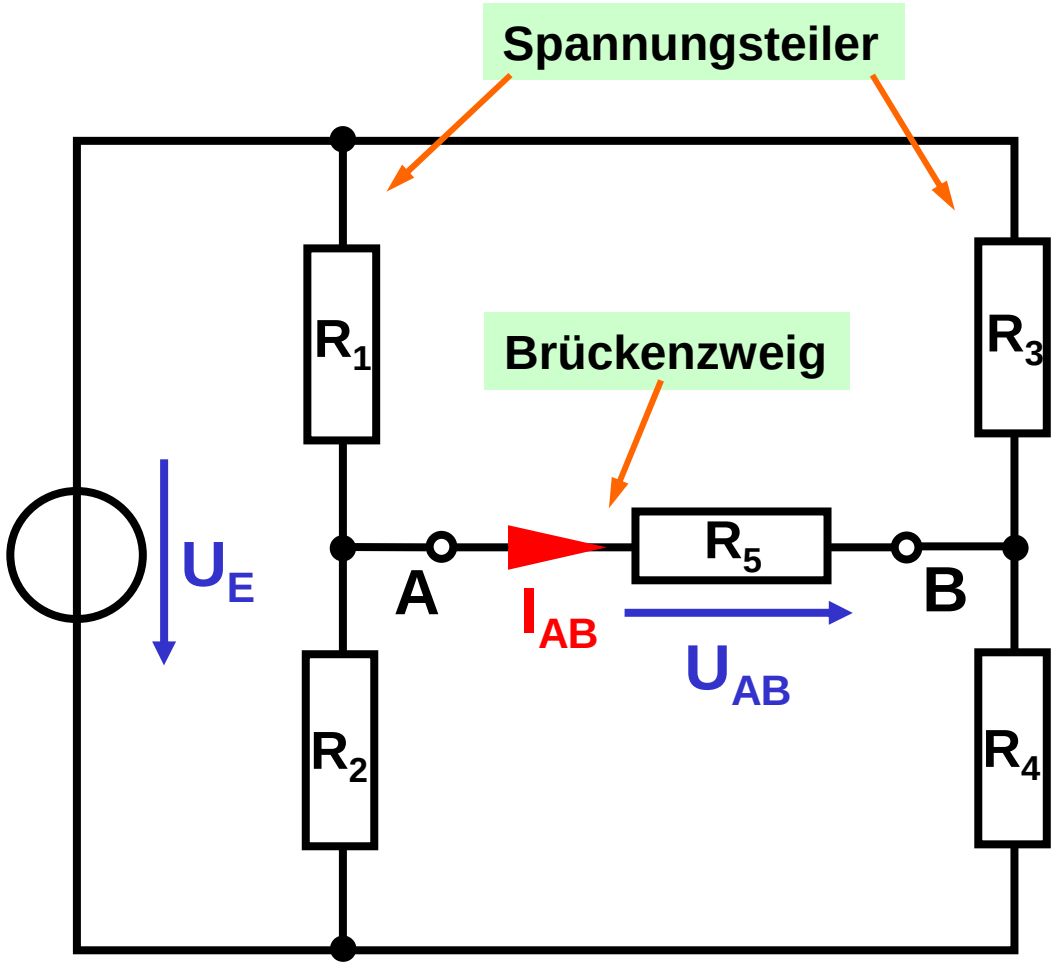
Ersatzquellenverfahren

Darstellung eines komplexen Netzwerkes als Spannungs- bzw. Stromquelle bezüglich zwei beliebiger Punkte A und B in diesem Netzwerk.

R_i	Interne Quellen zu null setzen: ▪ Spannungsquellen kurzschließen ▪ Stromquellen auftrennen Widerstand zwischen A und B bestimmen: $R_i = R_{AB}$

U_0	**Oder**	**I_0**
Leerlaufspannung zwischen A und B		Kurzschlussstrom zwischen A und B

Brückenschaltungen



U_{AB} kann durch Variation von R_1 - R_4 in Betrag und Polarität verändert werden.

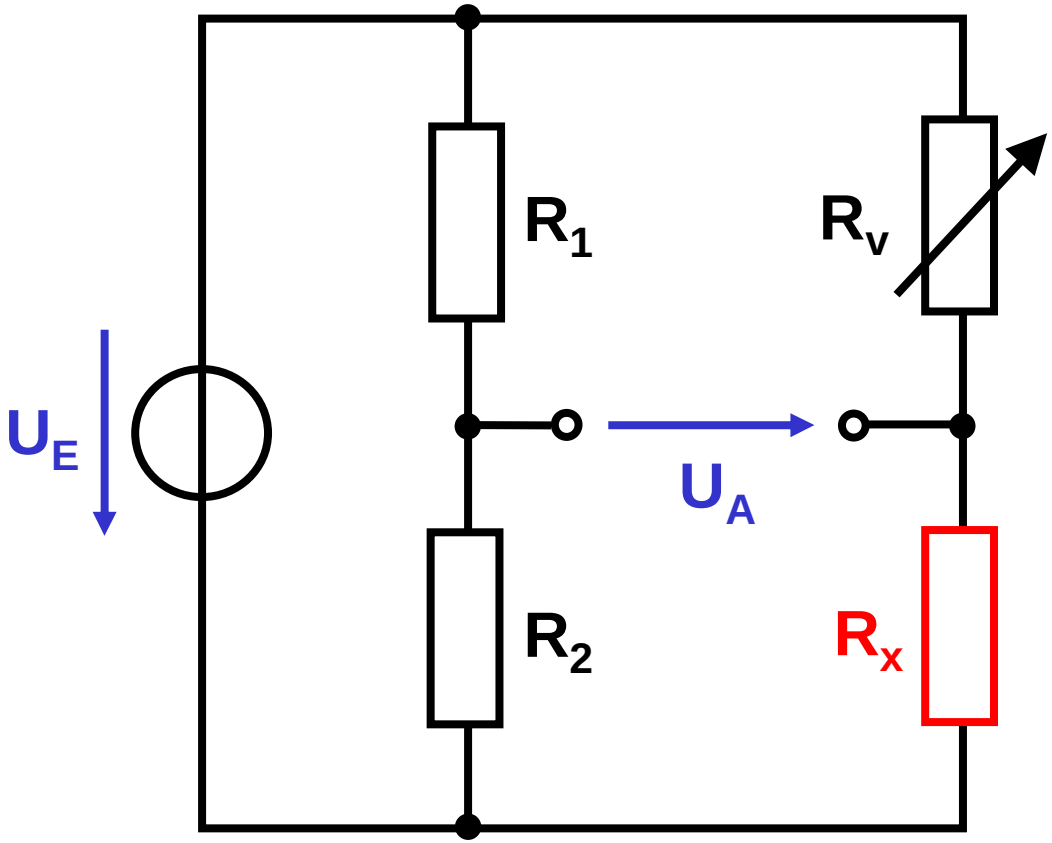
Abgleichbedingung:

$$U_{AB} = 0$$

Unterschiedlichste Verwendung in:

- Leistungselektronik
- Messtechnik
- Nachrichtentechnik

Wheatstone-Brücke



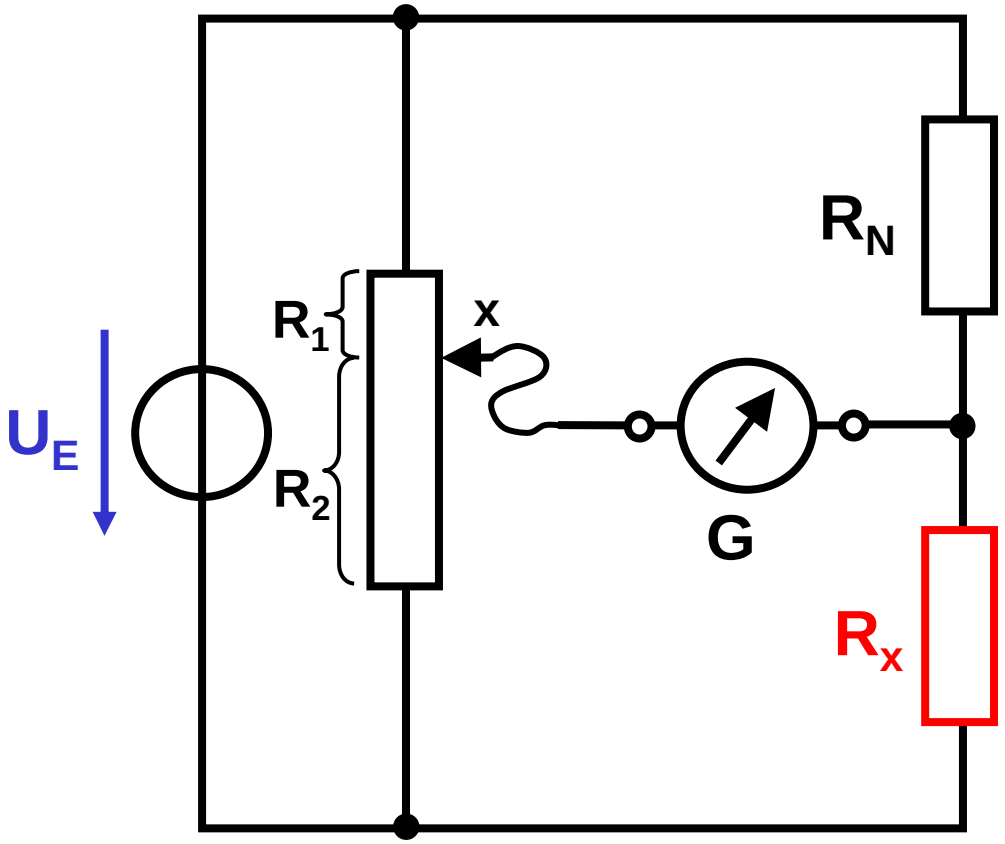
Abgleichbedingung:

$$U_A = 0 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_v}{R_x}$$

- Probewiderstand R_x anschließen
- Brücke mit R_v abgleichen

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_v$$

Schleifdrahtmessbrücke – abgewandelte Wheatstonebrücke



Abgleichbedingung:

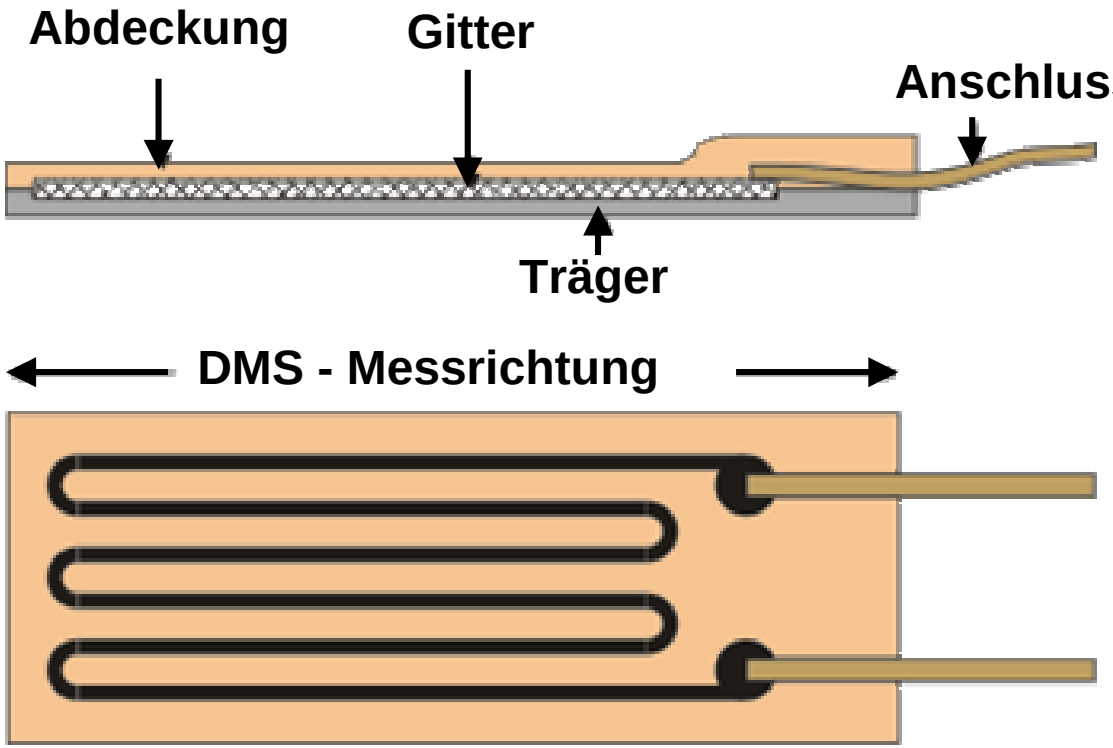
$$U_A = 0 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_N}{R_x}$$

Probewiderstand:

$$R_x = \frac{x}{1-x} R_N$$

Wheatstone - Ohmmeter

Dehnungsmessstreifen (DMS) in Brückenschaltung



Grundwiderstand:
R_0 = 100Ω bis 1kΩ

Widerstandsänderung:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon$$

k ... k-Faktor
$k \approx 2$ bei Metallen
ε ... relative Dehnung

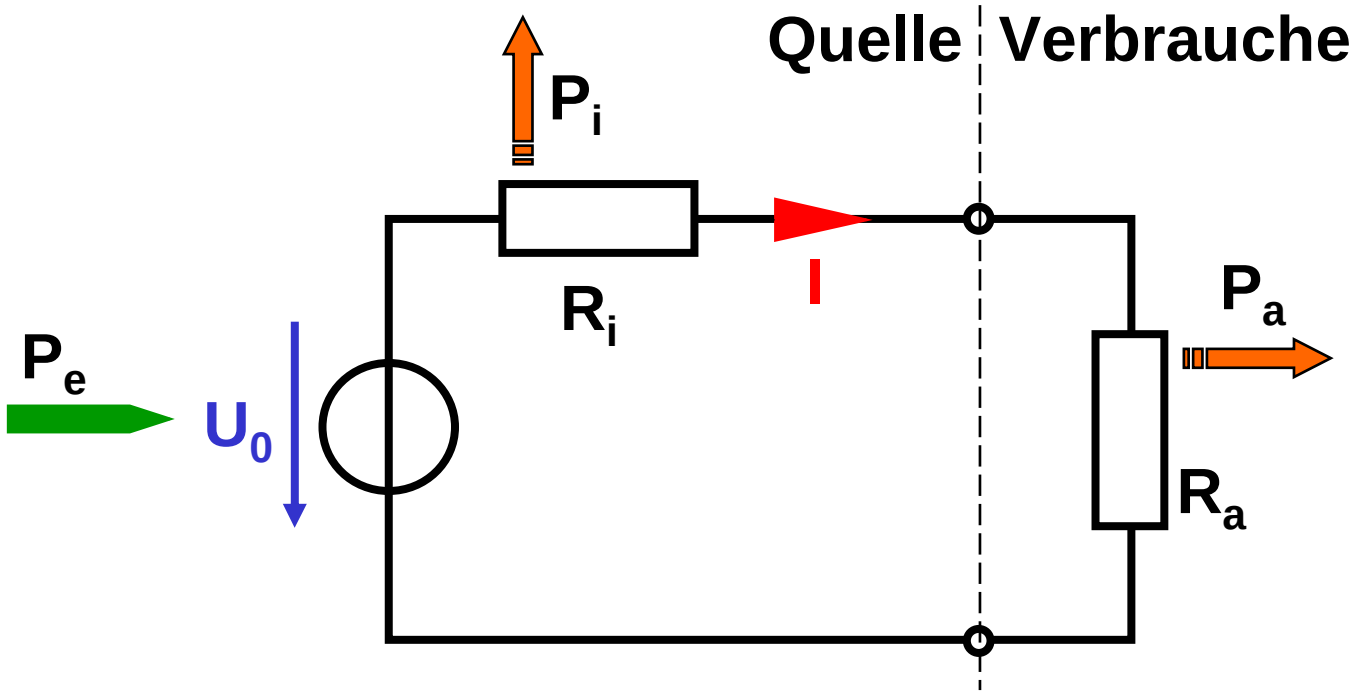
Ergänzungen zu Grundlagen der Elektrotechnik WS 07/08

Skript

Skript Ergänzungen I → 2,50Euro
Skript Ergänzungen II → 2,50Euro

Dr. Manfred Filtz
EN 629
Sprechstunde: Montags 14Uhr
http://www-tet.ee.tu-berlin.de/persons.html

Leistungsanpassung und Wirkungsgrad



Pe … Eingangsleistung
Pi … Verlustleistung
Pa … Ausgangsleistung

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_a}{P_e} = \frac{P_a}{P_a + P_i} < 1$$

Leistungsanpassung

Energietechnik

Der Verbraucher bekommt den größtmöglichen Teil der Gesamtleistung.
Der Wirkungsgrad wird maximiert.

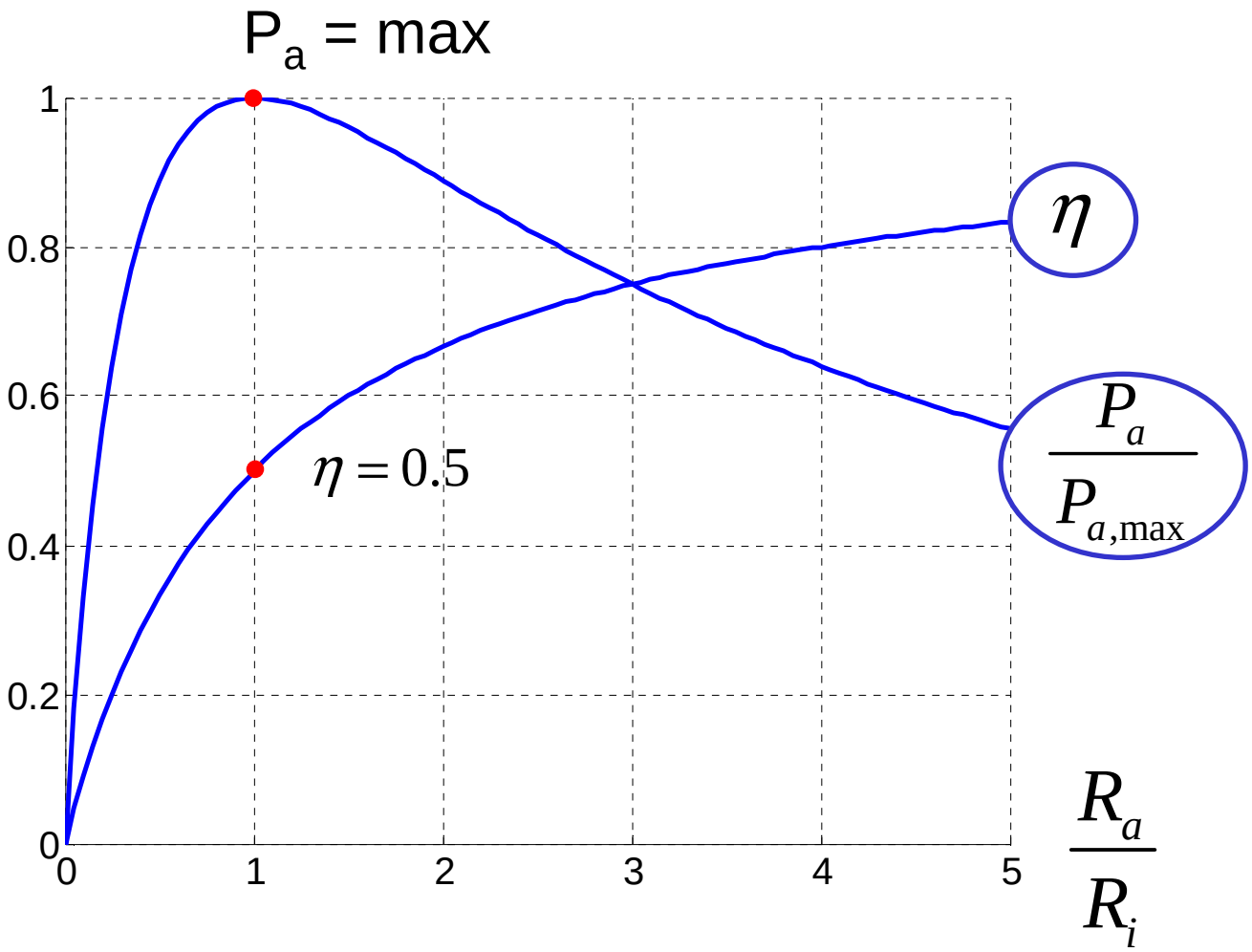
$$\frac{R_i}{R_a} \rightarrow 0$$

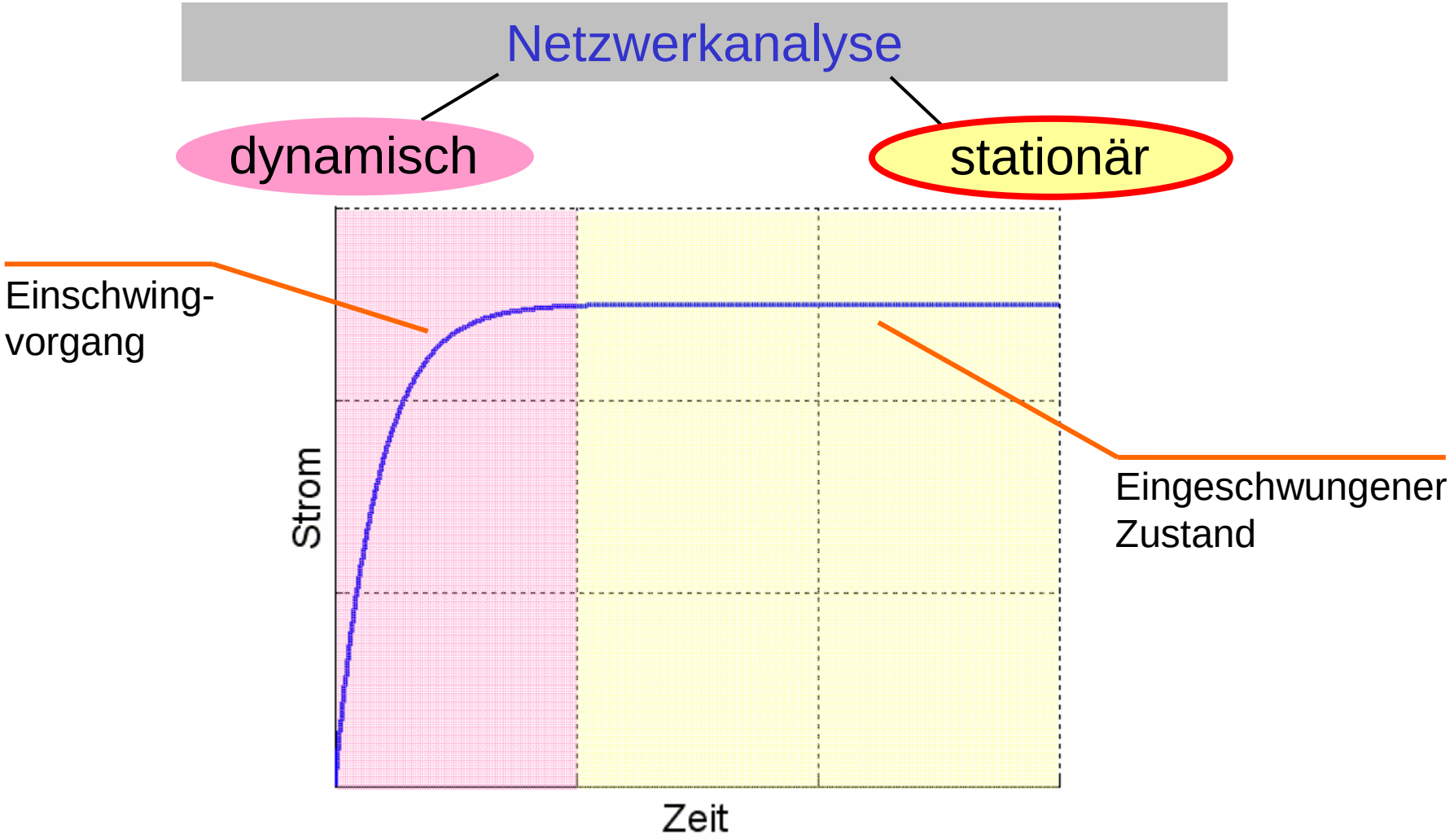
Nachrichtentechnik

Der Verbraucher soll dem Stromkreis die größtmögliche Leistung entnehmen.
Die Ausgangsleistung wird maximiert.

$$R_a = R_i$$

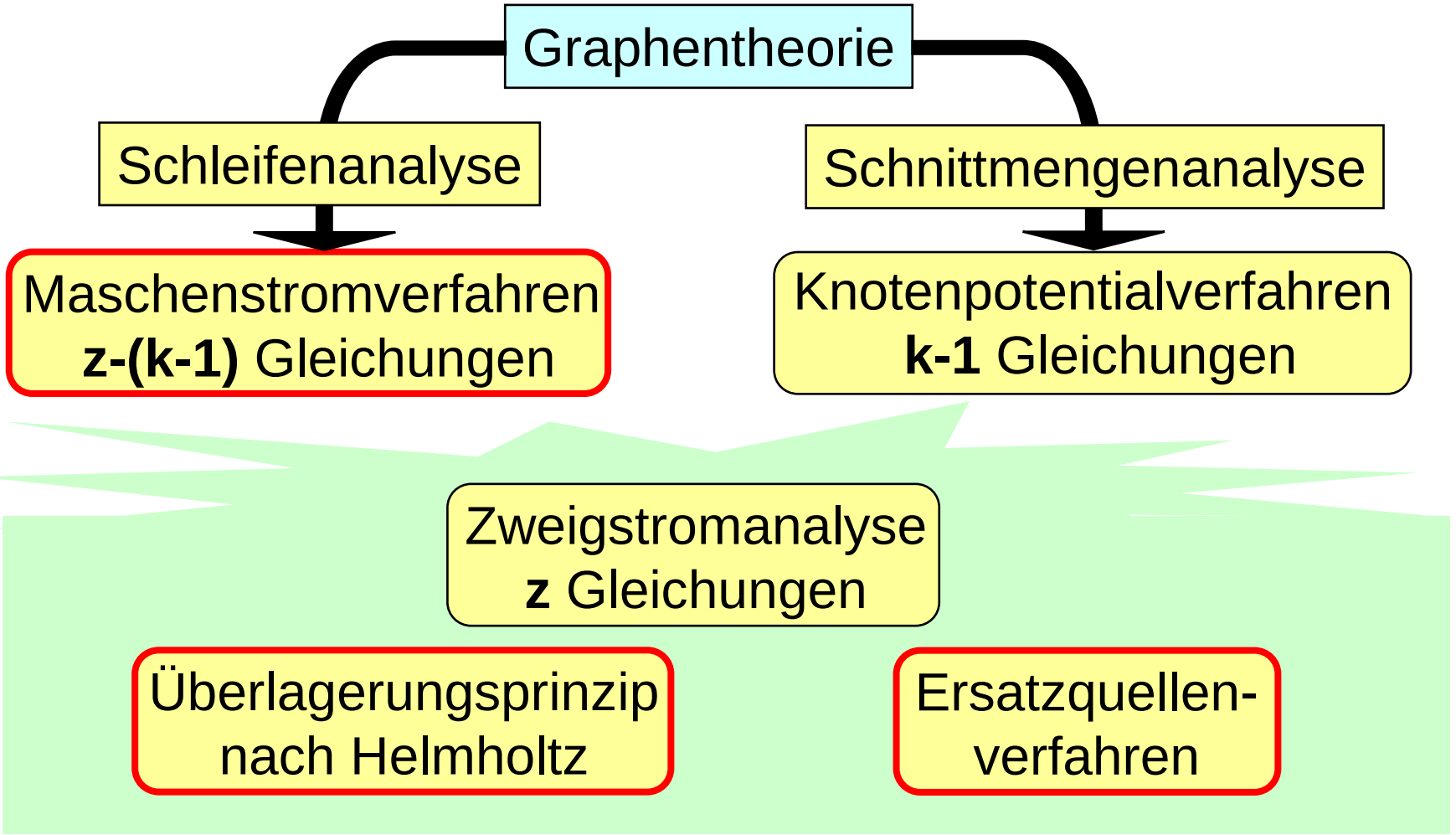
Leistungsanpassung





Bsp: Einschaltvorgang an einer Induktivität

Analyse des stationären Verhaltens linearer Netzwerke



Analyse linearer Netzwerke

3 Arten von Gleichungen sind nötig:

- Stromgleichungen ⇨ **Knotenregel**
- Spannungsgleichungen ⇨ **Maschenregel**
- Strom-Spannungsbeziehungen

lineares Netzwerk ⇨ **Ohmsches Gesetz**

Netzwerk

k Knoten

z Zweige

Zur Analyse notwendig:

k-1 beliebige **Knoten**gleichungen

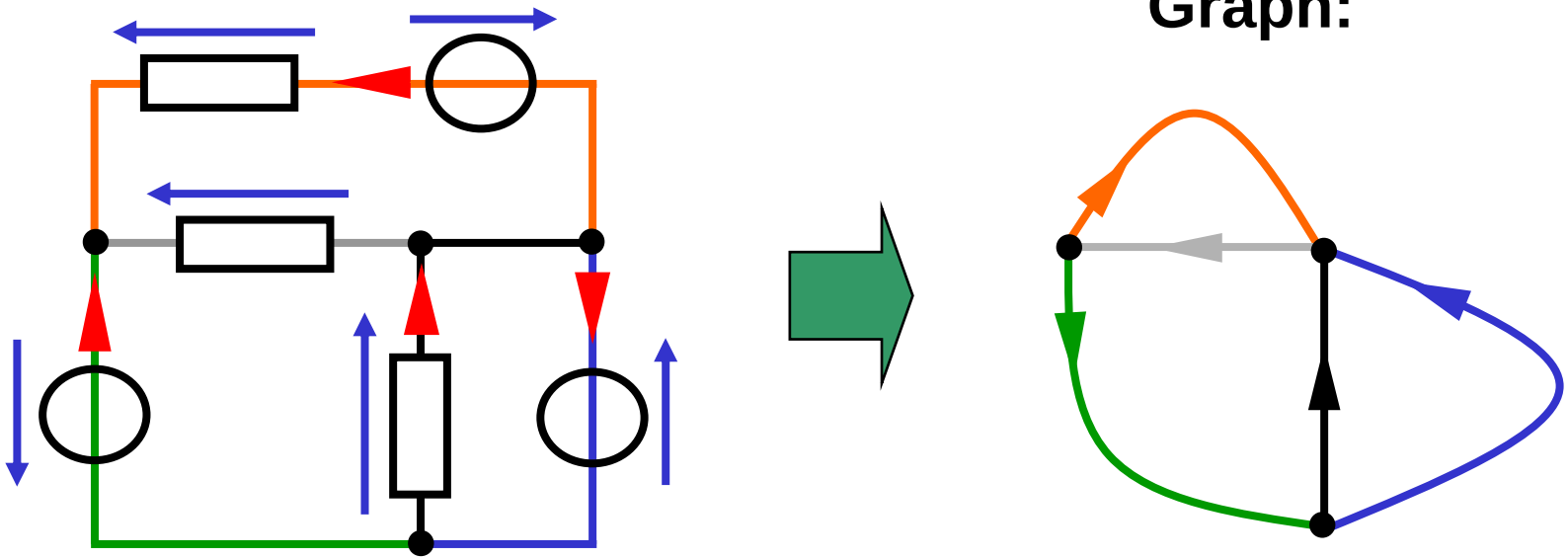
und / oder

z-(k-1) unabhängige **Maschen**gleichungen

= Fundamentalschleifen eines Baums

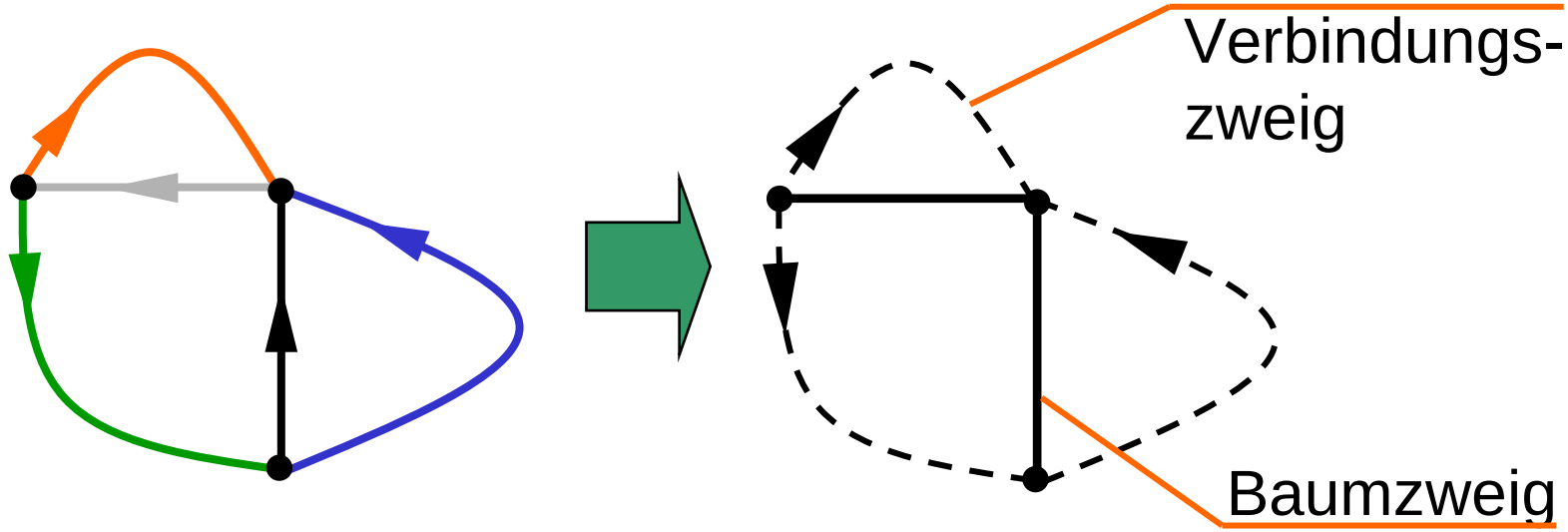
Gerichteter Graph

Den Graphen eines Netzwerks erhält man, wenn man alle Elemente durch Linien und alle Verzweigungen durch Knoten ersetzt. Die Zweige erhalten einen Richtungssinn gemäß eingetragenen Strom.



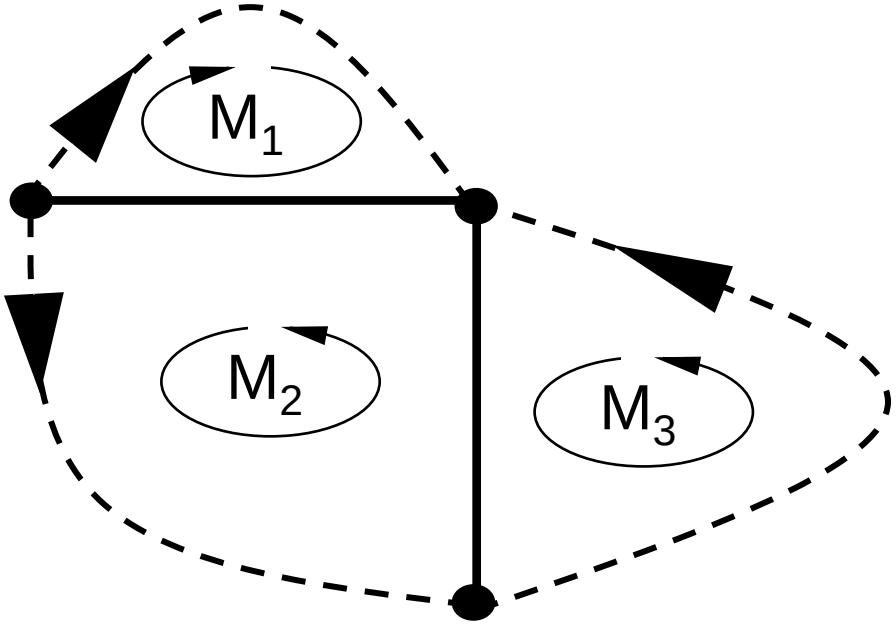
Baum

Ein Baum ist ein zusammenhängender Teilgraph, der sämtliche Knoten des Graphen, aber keine Schleifen enthält. Die Form des Baumes ist nicht vorgeschrieben.



Unabhängige Maschen

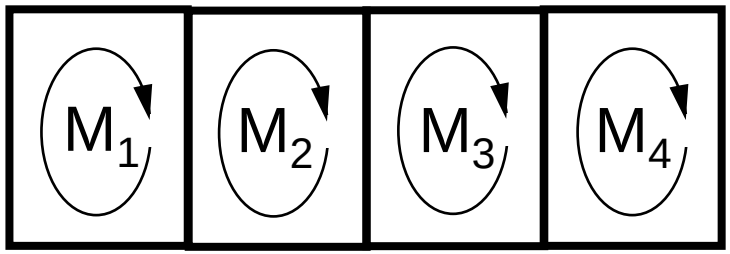
Maschen sind unabhängig, wenn sie genau einen Verbindungszweig enthalten, der zu keiner anderen Masche gehört. Die Zählrichtung der Masche ist durch die Richtung des Verbindungszweigs bestimmt.



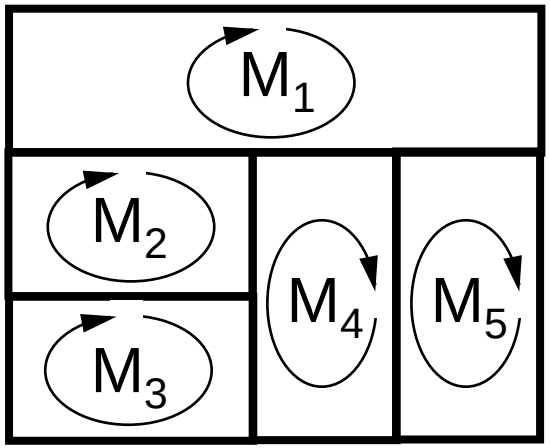
Unabhängige Maschen – einfach finden

Voraussetzung:
Das Netzwerk ist in der Ebene überschneidungsfrei darstellbar
Praktisch immer gegeben bei Netzwerkaufgaben !!

Maschen so wählen, dass:
- alle Zweige abgedeckt werden
- sich keine Maschen überschneiden



z = 9, k = 6
z-(k-1) = 4



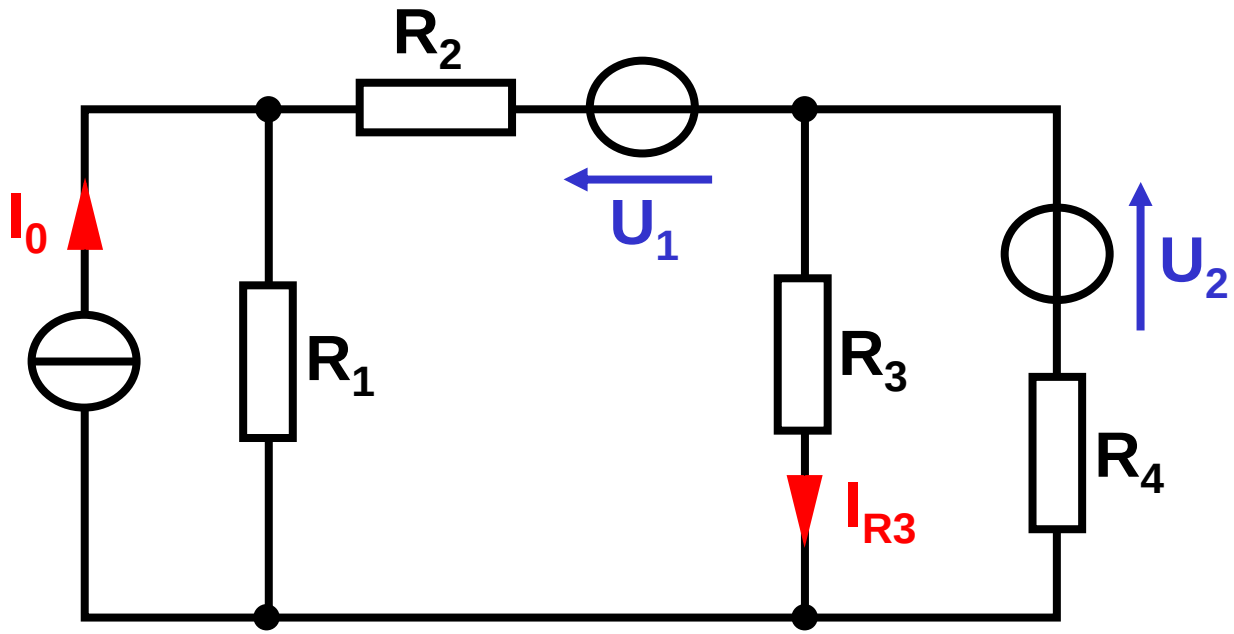
z = 12, k = 8
z-(k-1) = 5

Maschenstromverfahren

1. Serien- und Parallelschaltungen von passiven Elementen erkennen und zusammenfassen
2. Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln
3. **z-(k-1)** unabhängige Maschen bestimmen, Maschenströme einzeichnen
4. Maschengleichungen für die Maschenströme gemäß Umlaufsinn aufstellen
5. Gleichungen bzw. Gleichungssystem auflösen
6. Zweigströme durch vorzeichenrichtige Überlagerung der Maschenströme bestimmen

Maschenstromverfahren - Aufgabe

Mit Hilfe des Maschenstromverfahrens soll der Strom I_{R3} im Widerstand R_3 berechnet werden.



$I_0 = 1A$
$U_1 = 2V$
$U_2 = 3V$
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$R_3 = 2\Omega$
$R_4 = 4\Omega$

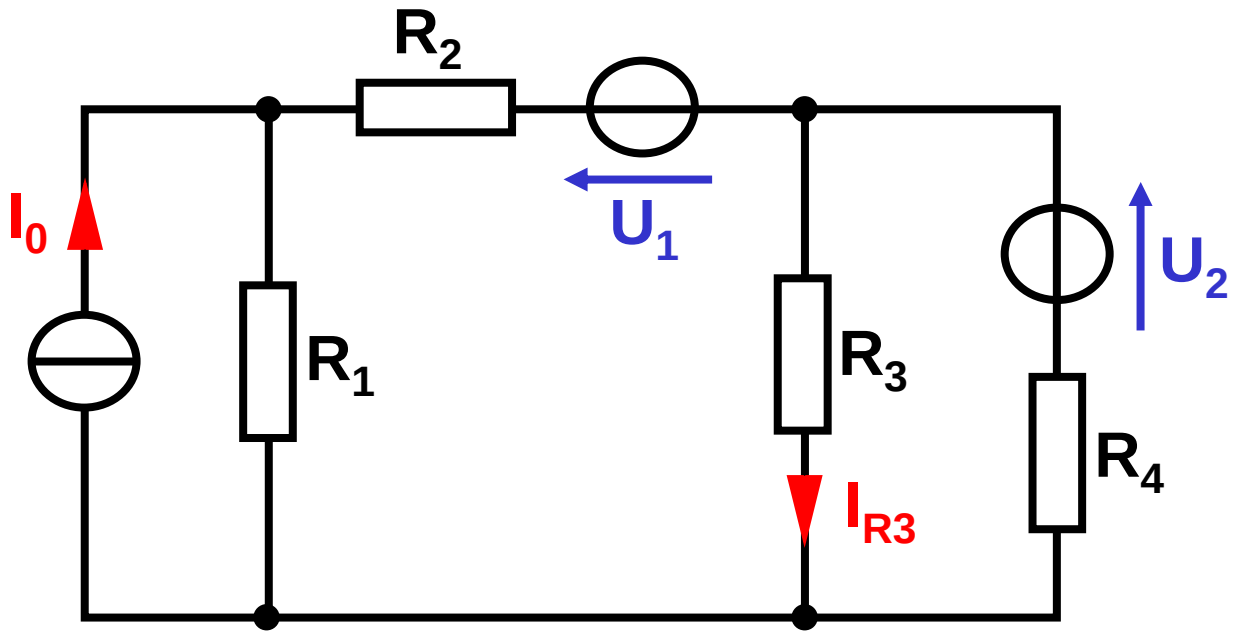
Superpositions- bzw. Überlagerungsprinzip

Voraussetzung:
Alle Elemente im Netzwerk sind linear und die Quellen voneinander unabhängig.

Ströme und Spannungen,
die von **allen Quellen** gleichzeitig erzeugt werden,
sind gleich der **Summe** der Ströme bzw. Spannungen,
die von jeder **einzelnen Quelle** hervorgerufen werden,
wenn dabei die anderen Quellen durch ihre idealen Innenwiderstände ersetzt (null gesetzt) werden.

Überlagerungsprinzip - Aufgabe

Mit Hilfe des Überlagerungsprinzips soll der Strom I_{R3} im Widerstand R_3 berechnet werden.



$I_0 = 1A$
$U_1 = 2V$
$U_2 = 3V$
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$R_3 = 2\Omega$
$R_4 = 4\Omega$

Elektrostatisches Feld

Elektrische Ladungen üben untereinander eine Kraft aus. In dem Teil des Raumes, in dem diese Kraftwirkung nachzuweisen ist, besteht ein elektrisches Feld!

➡ Ladungen sind von einem elektrischen Feld umgeben.

Kraft { ~ Stärke des elektrischen Feldes
~ Probeladung

⇩

<u>Charakteristische Größe</u>

Elektrische Feldstärke:

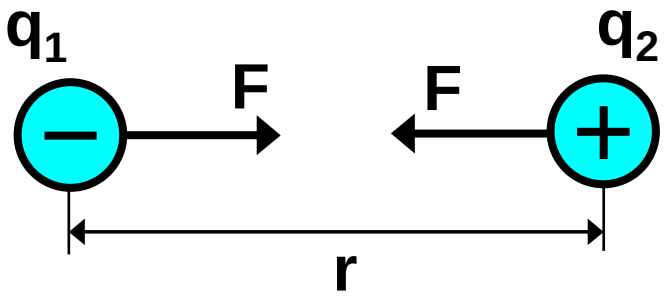
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

Coulomb‘sches Gesetz

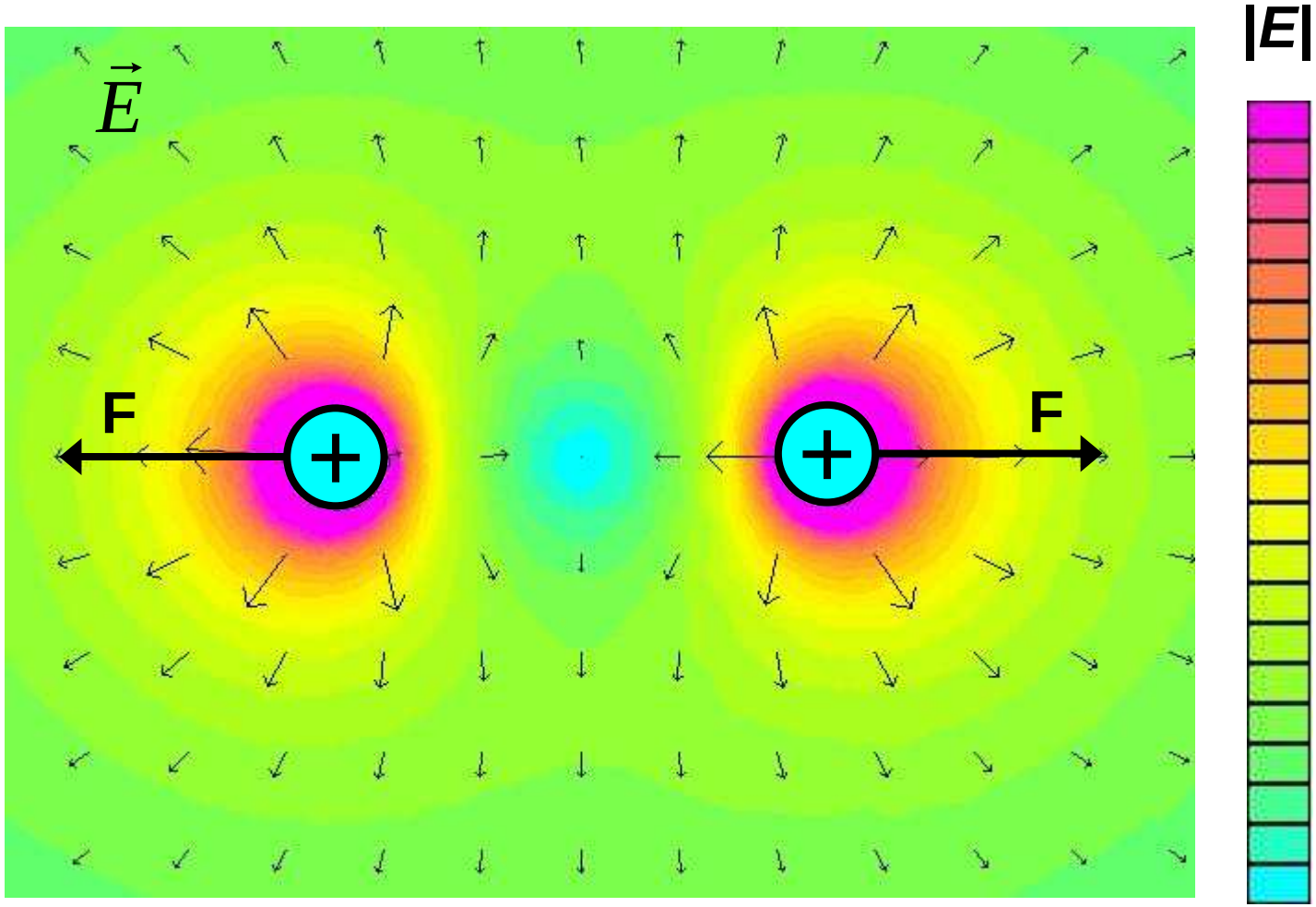
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$ ⇨ Im Vakuum (~Luft)

Permittivität im Vakuum (Dielektrizitätskonstante):

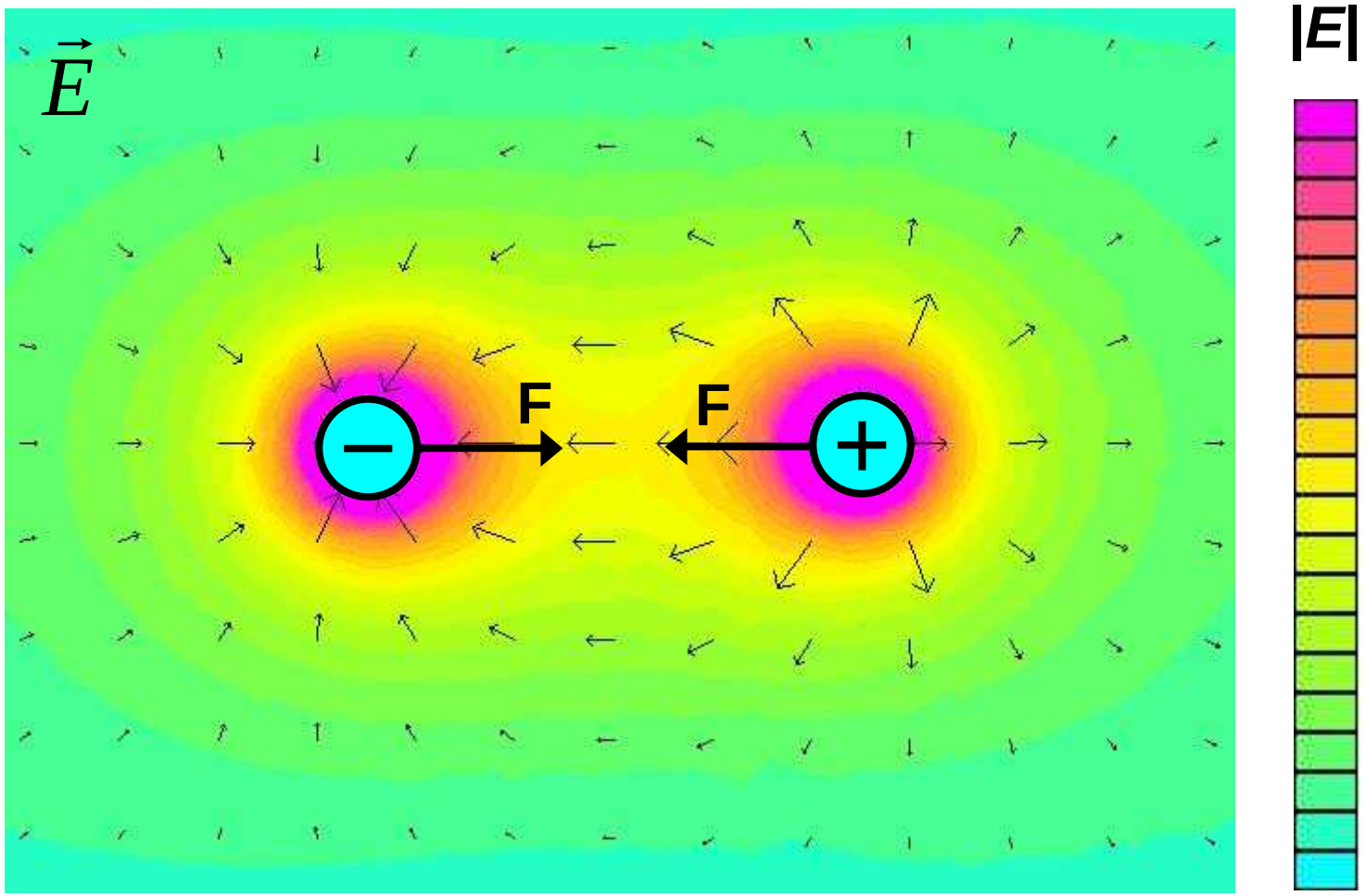
ε_0 = 8.854187…10-12 As / Vm



Elektrische Ladungen, gleiches Vorzeichen



Elektrische Ladungen, ungleiches Vorzeichen



Permittivität

Die Permittivität ist eine Materialgröße und ein Maß für die Durchlässigkeit für elektrische Felder.

Permittivität (Dielektrische Leitfähigkeit)

Relative Permittivität
$\varepsilon_r = 1 \ldots 10.000$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

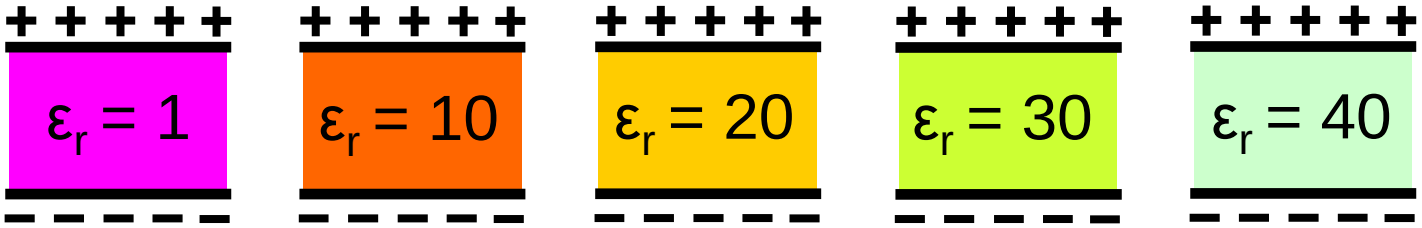
Permittivität des Vakuums
$\varepsilon_0 = 8.854187\ldots10\text{-}12$ As / Vm

Elektrische Flussdichte (Verschiebungsdichte)

Die elektrische Flussdichte ist ein materialunabhängige Feldgröße. Sie hängt einzig von der Ladungsverteilung ab.

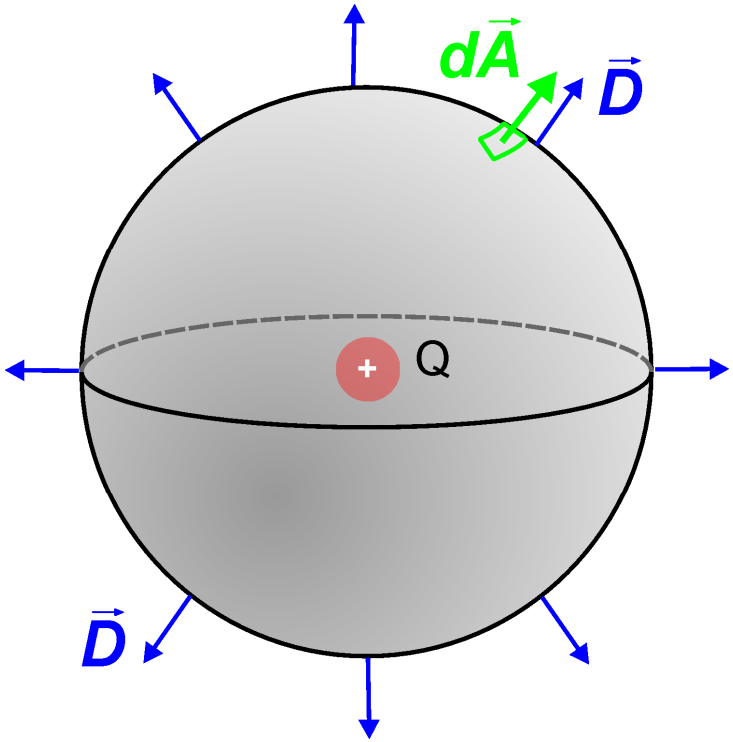
Plattenkondensator: Q = konst. ⇨ D = konst.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$



Gauß‘scher Satz

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens ist gleich der eingeschlossenen Ladung.



$$\Psi_{ges} = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{ges}$$

Ψ … Elektr. Fluss (Verschiebungsfluss) [C]

$\vec{D}$ … Elektr. Flussdichte [As/m²]

Q … Elektr. Ladung [C]

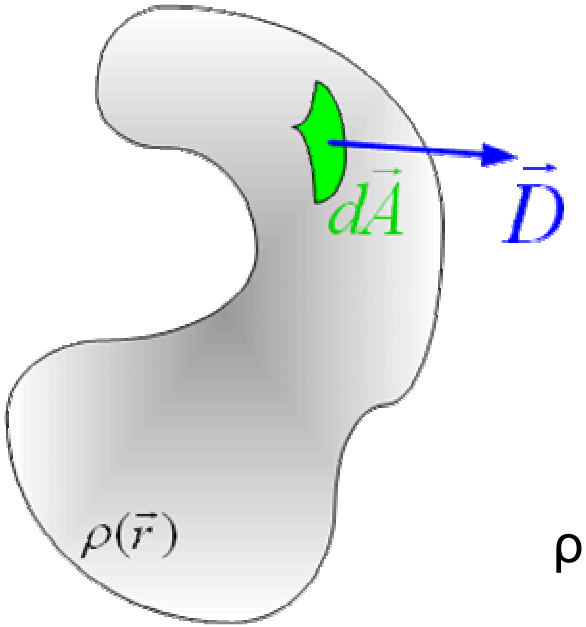
ε_0 … Permittivität des Vakuums [As/Vm]

∂V … Oberfläche (Rand) eines Volumens

$d\vec{A}$ … Flächenelement auf dem Volumen [m²]

1. Maxwellsche Gleichung

Der Gauß‘sche Satz gilt auch für beliebige Ladungs-verteilungen.



$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{V} \rho \cdot dV$$

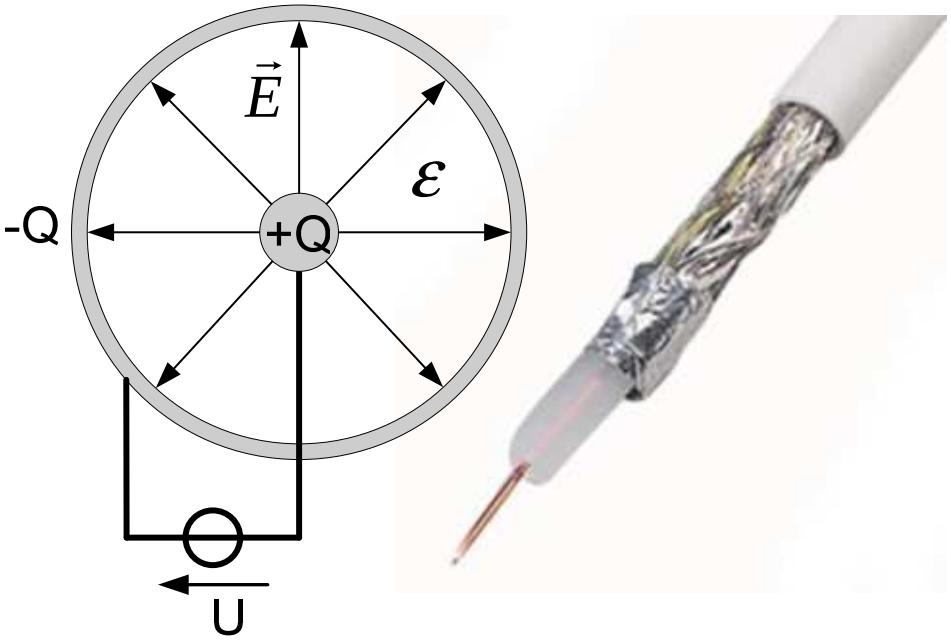
ρ … Raumladungsdichte [C/m³] am Ort $\vec{r}$

Kapazität

Die Kapazität von Leiteroberflächen gibt das Verhältnis der zugeführten Gesamtladung zu der dazu notwendigen Spannung an.

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{A}}{\int_{A}^{B} \vec{E} d\vec{s}}$$

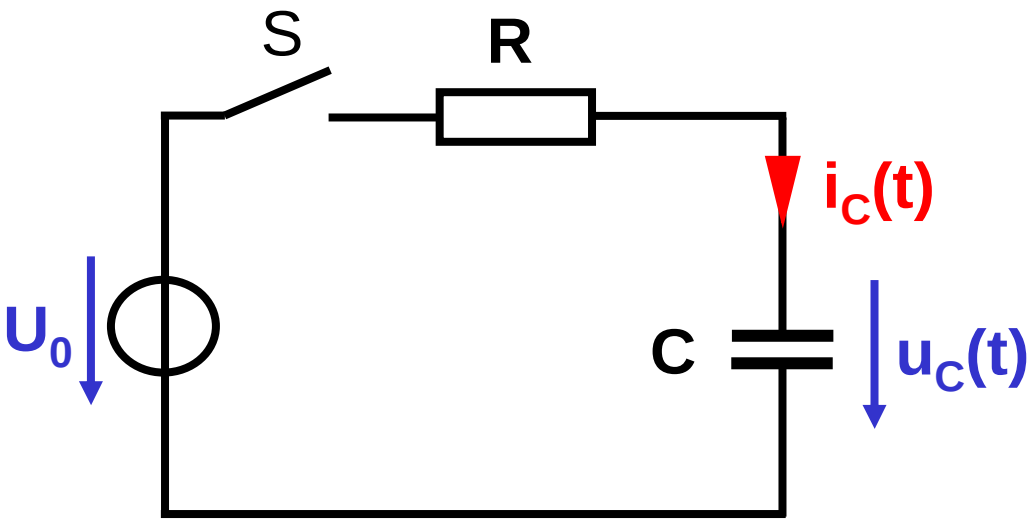
[C] = 1F



Ausgleichsvorgänge an einer Kapazität

Dynamische Beschreibung:

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow q(t) = C \cdot u(t) \quad \& \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



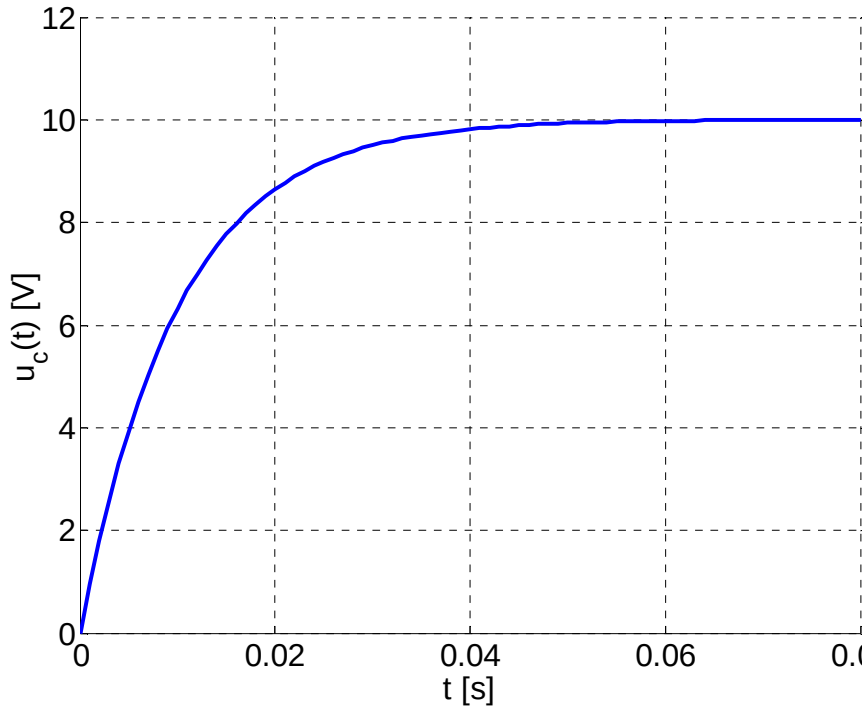
Im Zeitpunkt t = 0

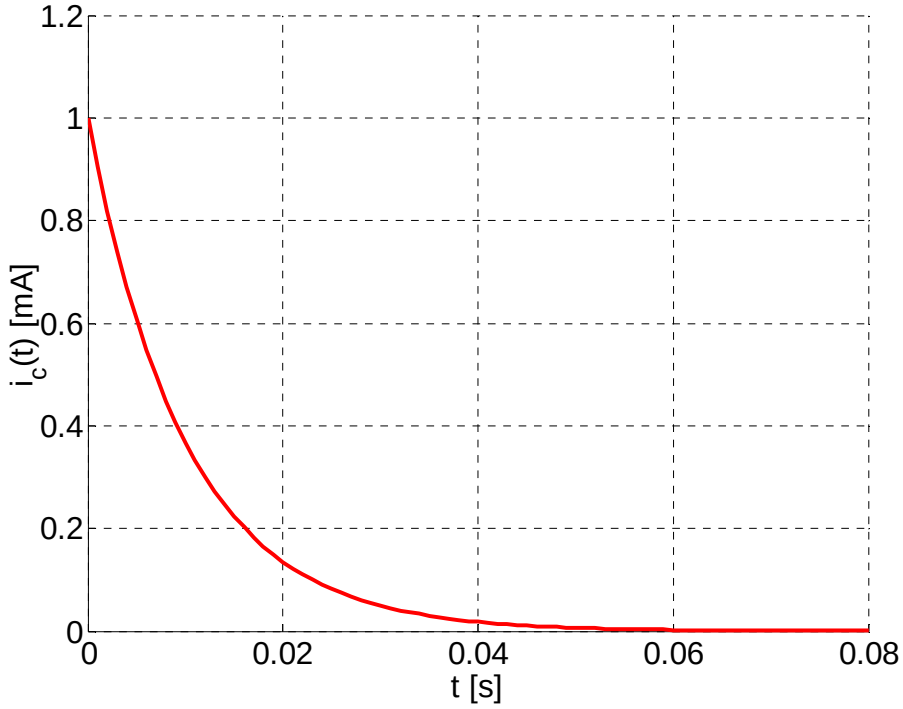
- S wird geschlossen
- Spannung $u_c(t) = 0$

$U_0 = 10V$ $\quad$ $R = 10k\Omega$, $C = 1\mu F$ $\Rightarrow$ $\tau = RC = 10ms$

$$u_c(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i_c(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$





Magnetostatisches Feld

Elektrische Ströme üben untereinander und auf Magneten bzw. magnetisierbare Körper eine Kraft aus. In dem Teil des Raumes, in dem diese Kraftwirkung nachzuweisen ist, besteht ein magnetisches Feld!

⇨ Ströme sind von einem magnetischen Feld umgeben.

Kraft
- ~ Stärke des magnetischen Feldes
- ~ Stromstärke

⇩

Charakteristische Größe

Magnetische Induktion:

Betrag:

$$B(I_1) = \frac{F}{I_2 \cdot l}$$

Richtung:

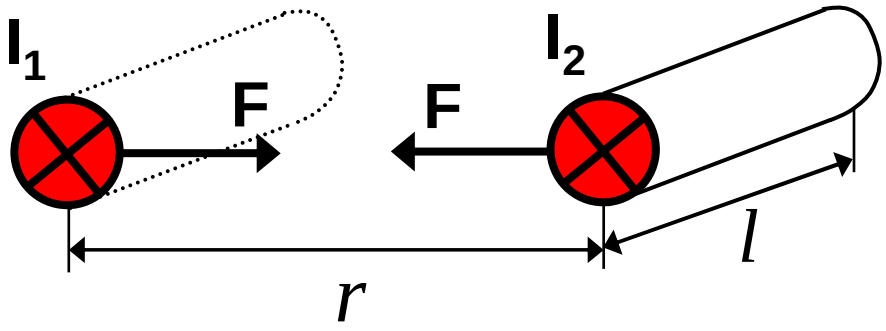
$$I_1 \parallel I_2 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{I} \perp \vec{F}$$

Ampère‘sches Gesetz

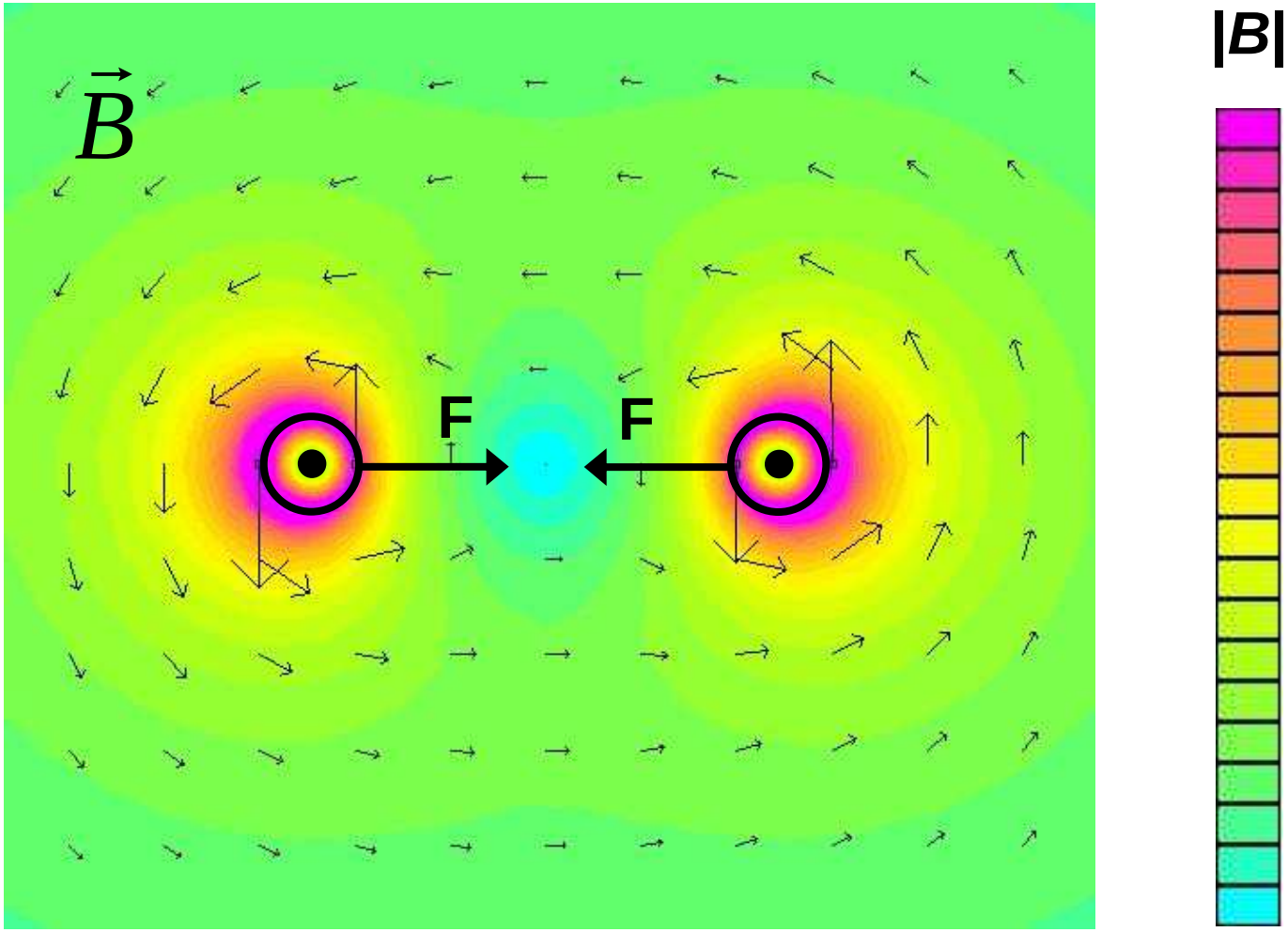
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r}$$ ⇨ Im Vakuum (~Luft)

Permeabilität des Vakuums (magn. Feldkonstante):

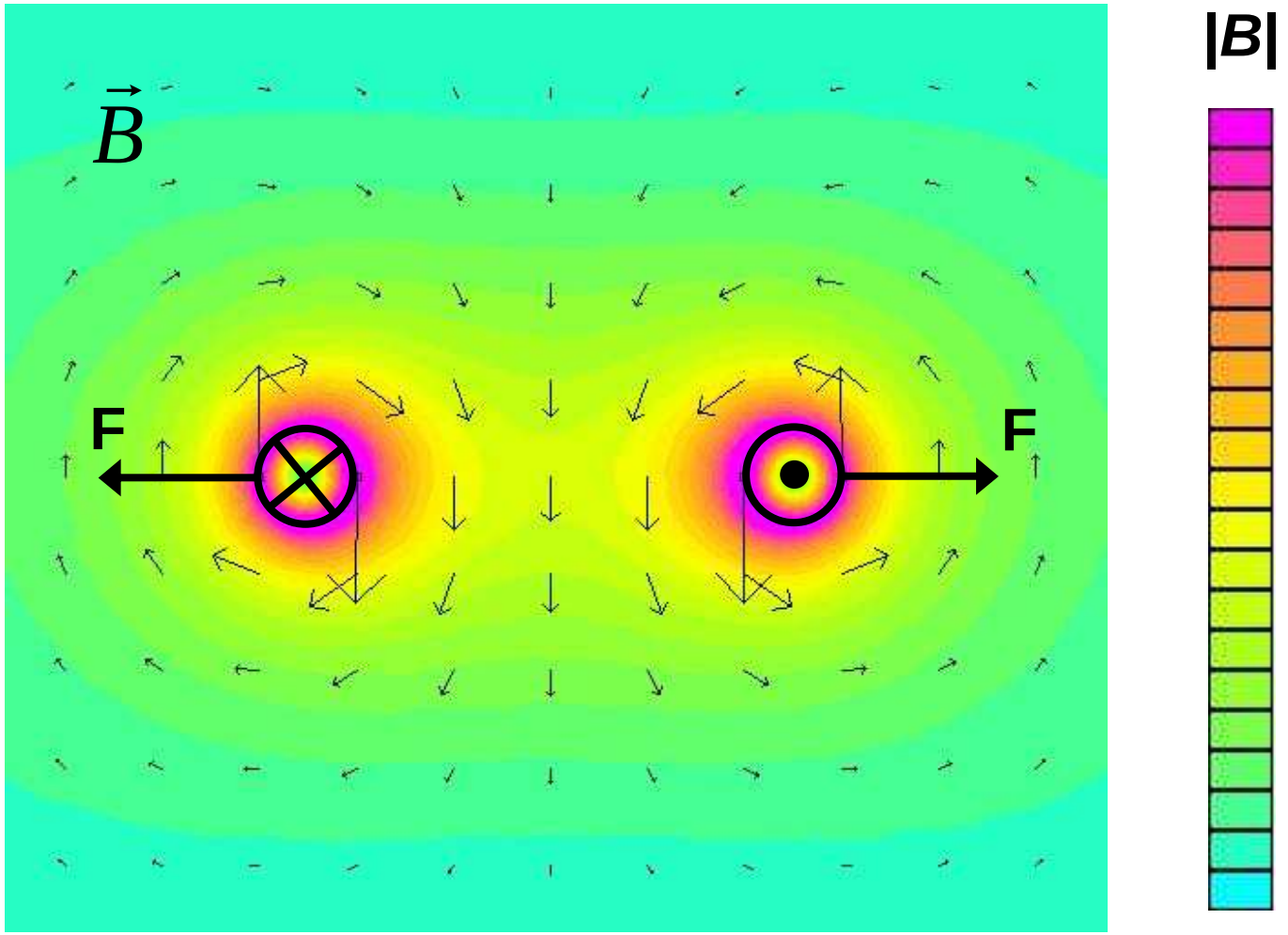
$\mu_0 = 4\pi \bullet 10^{-7}$ H / m



Elektrische Ströme, gleiche Richtung



Elektrische Ströme, gegensätzliche Richtung



Permeabilität

Die Permeabilität ist eine Materialgröße und ein Maß für die Durchlässigkeit für magnetische Felder.

Permeabilität (magnetische Leitfähigkeit)

Relative Permeabilität
diamagnetisch $\mu_r < 1$
paramagnetisch $\mu_r > 1$
ferromagnetisch $\mu_r \gg 1$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

Permeabilität des Vakuums
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H / m

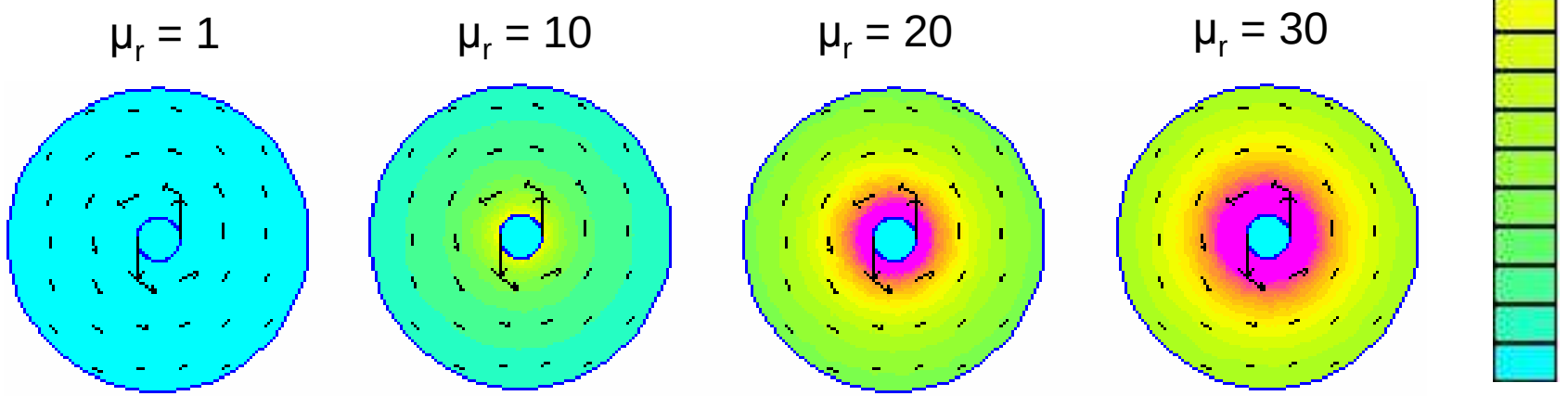
Material	Permeabilität (μ)
Luft	1
Kupfer	<1
Aluminium	>1
Eisen	500 ... 10.000
Ferrit	10 ... 20.000
Mumetall	10.000 .... 100.000

Magnetische Feldstärke

Die magnetische Feldstärke *H* ist eine materialunabhängige Feldgröße. Sie hängt einzig von der Anordnung der Ströme und Magneten ab.

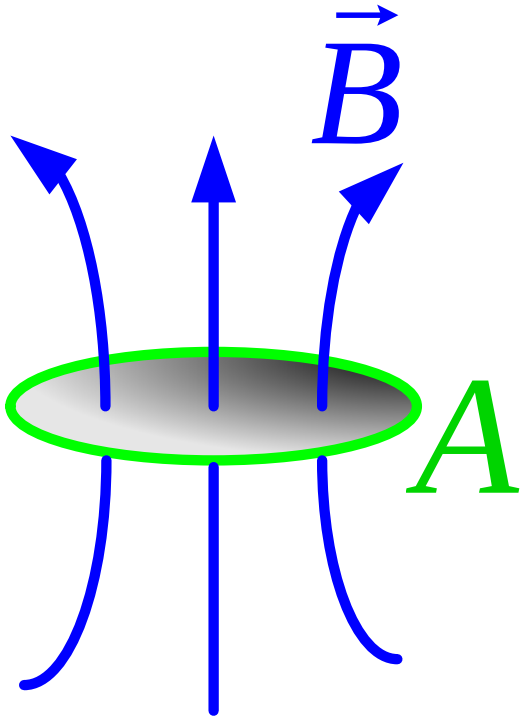
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Linienleiter: I = konst.
H = konst.



Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss durch eine Fläche ist gleich dem Integral der Flussdichte über diese Fläche.



$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- ϕ … Magn. Fluss [Wb]
- $\vec{B}$ … Magn. Flussdichte [Wb/m²]
- A … beliebige Fläche im Magnetfeld
- $d\vec{A}$ … Flächenelement auf der Fläche [m²]

2. Maxwellsche Gleichung

Die Feldlinien des Magnetfeldes bilden immer einen geschlossenen Umlauf. Das Feld ist *quellenfrei.*

Der magnetische Fluß, der in einen Körper hineinfließt, fließt an anderer Stelle auch wieder heraus.

Daher ist das Integral der Flussdichte über die Oberfläche eines geschlossenen Körpers null.

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Induktivität

Die Induktivität von Leiteranordnungen gibt das Verhältnis des gesamten erzeugten magnetischen Flusses zu dem dazu notwendigen Strom an.

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Bsp: lange Luftspule

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l}$$

L … Induktivität [H]

μ_0 … Permeabilität des Vakuums

n … Windungszahl

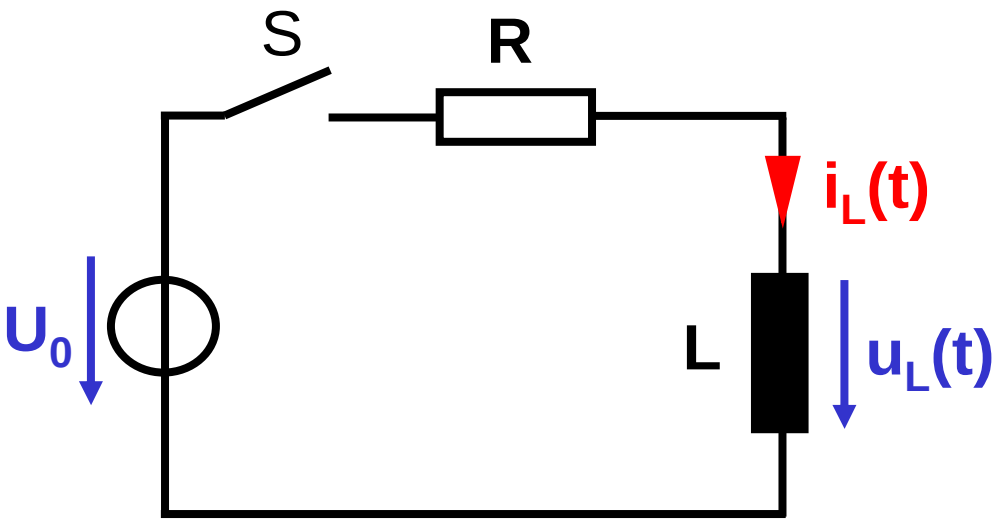
A … Querschnittsfläche [m²]

l … Länge der Spule [m]

Ausgleichsvorgänge an einer Induktivität

Dynamische Beschreibung:

$$L = \frac{\phi}{I} \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = L \cdot i(t) \quad \& \quad u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



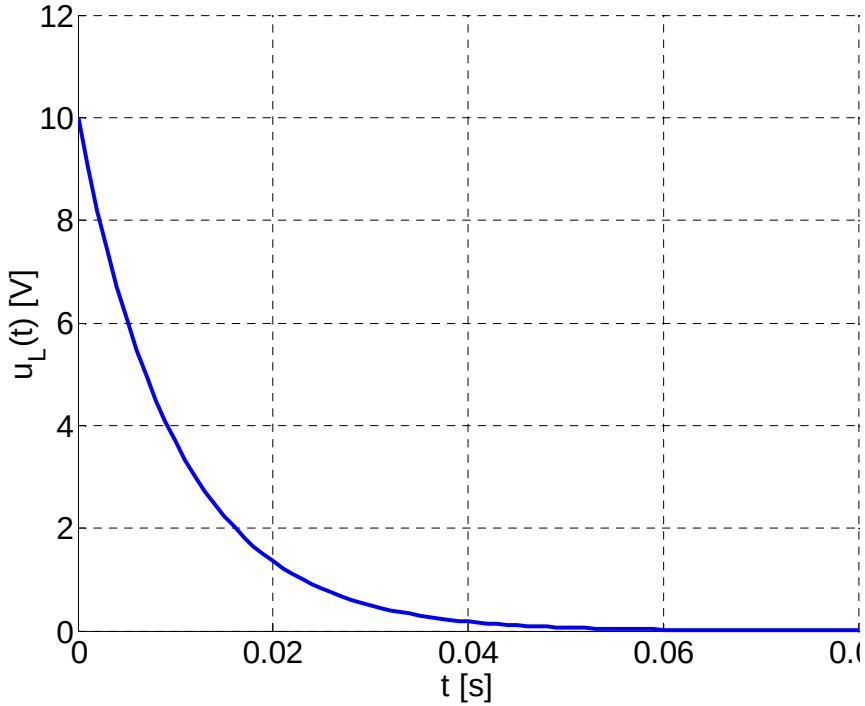
Im Zeitpunkt t = 0

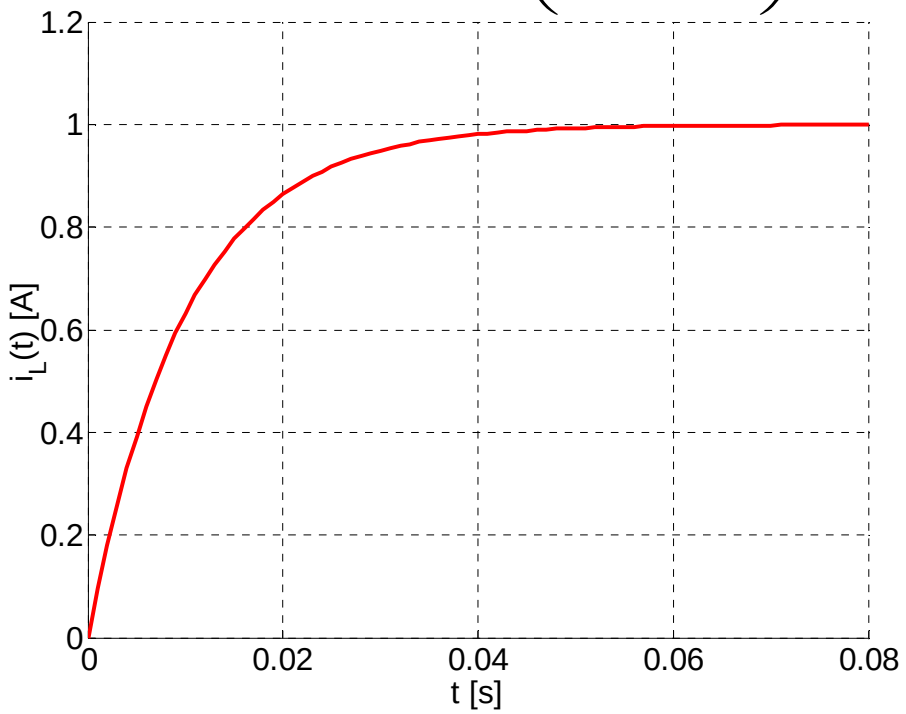
- S wird geschlossen
- Strom $i_L(t) = 0$

$U_0 = 10V$ $\quad$ $R = 10\Omega$, $L = 100mH$ $\Rightarrow \tau = \frac{L}{R} = 10ms$

$$u_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

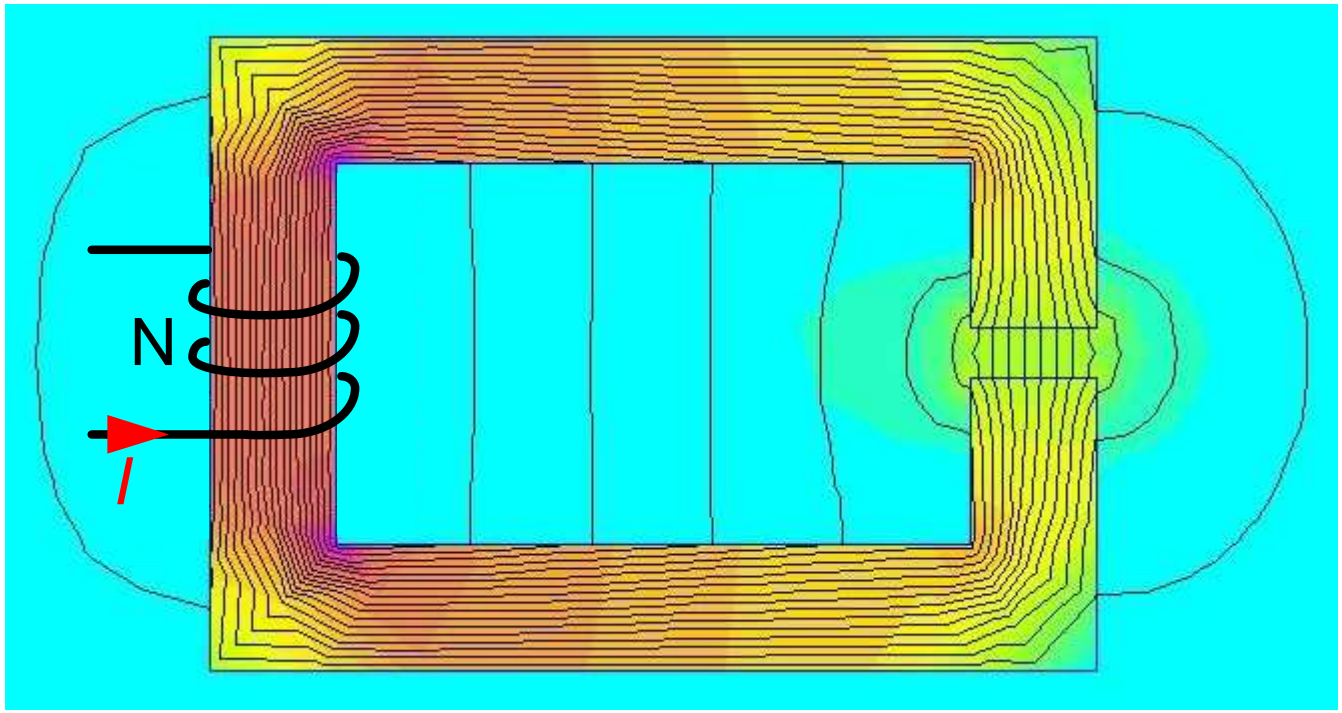
$$i_L(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

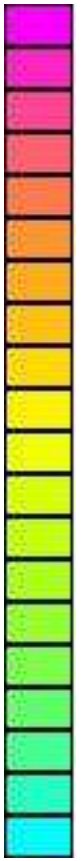




Magnetische Kreise

Ein magnetischer Kreis ist eine Anordnung, die den magnetischen Fluss entlang seiner ferromagnetischen Teile auf vorgeschriebene Wege lenkt.

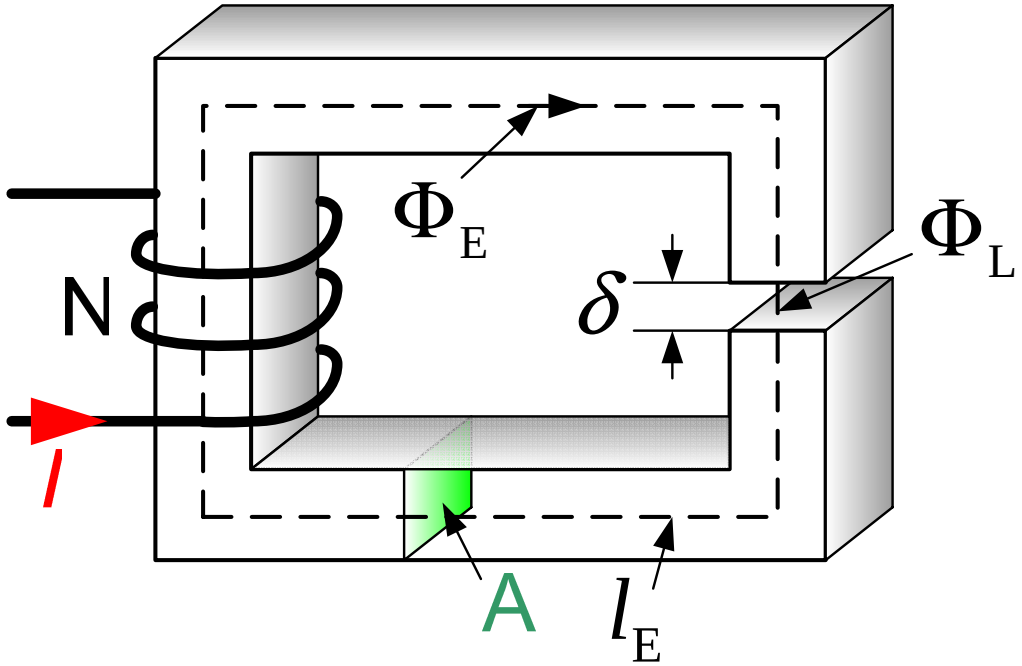




Berechnung magnetischer Kreise

Näherungsannahmen:

1. Der magnetische Fluss verläßt das Eisen nur an den Stirnseiten des Luftspaltes.
2. Das Magnetfeld ist in jedem Abschnitt homogen



I … Strom [A]

N … Windungszahl

Φ_E … Fluss im Eisen [Wb]

Φ_L … Fluss im Luftspalt [Wb]

A … Querschnitt [m²]

l_E … Eisenlänge [m]

δ … Luftspaltbreite [m]

Berechnung magnetischer Kreise

Durchflutungssatz

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{\mathrm{E}} l_{\mathrm{E}} + H_{\mathrm{L}} \delta = \Theta = \mathrm{N}I$$

Bestimmungs-gleichung für Flußdichte

$$\frac{B}{\mu_{\mathrm{E}}} \cdot l_{\mathrm{E}} + \frac{B}{\mu_{\mathrm{L}}} \cdot \delta = \Theta$$

$$\mathrm{A} \cdot B \left(\frac{l_{\mathrm{E}}}{\mu_{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{A}} + \frac{\delta}{\mu_{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{A}} \right) = \Theta$$

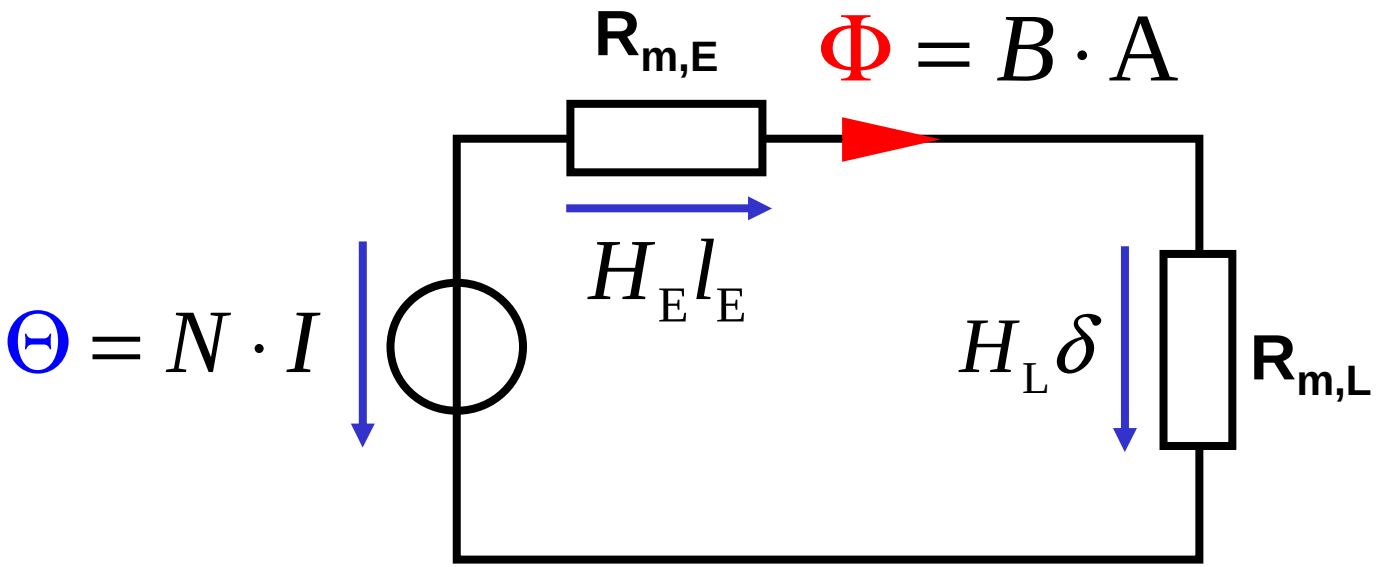
Fluss

Widerstand

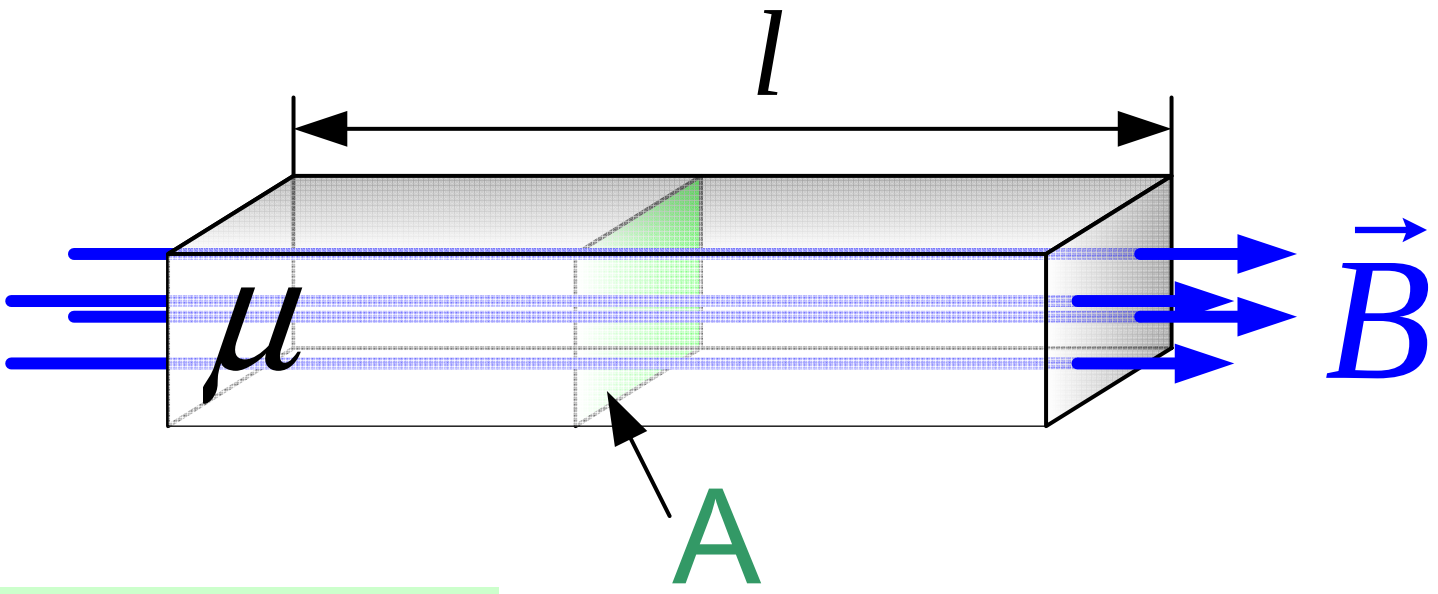
Spannung

0hmsches Gesetz magnetischer Kreise

$$\Phi = \frac{\theta}{R_m} \qquad \text{magn. Fluss} = \frac{\text{magn. Spannung}}{\text{magn. Widerstand}}$$



Magnetischer Widerstand



$$\Phi = BA$$

$$\Theta = Hl = \frac{B}{\mu} l$$

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{l}{\mu A}$$

Selbstinduktivität

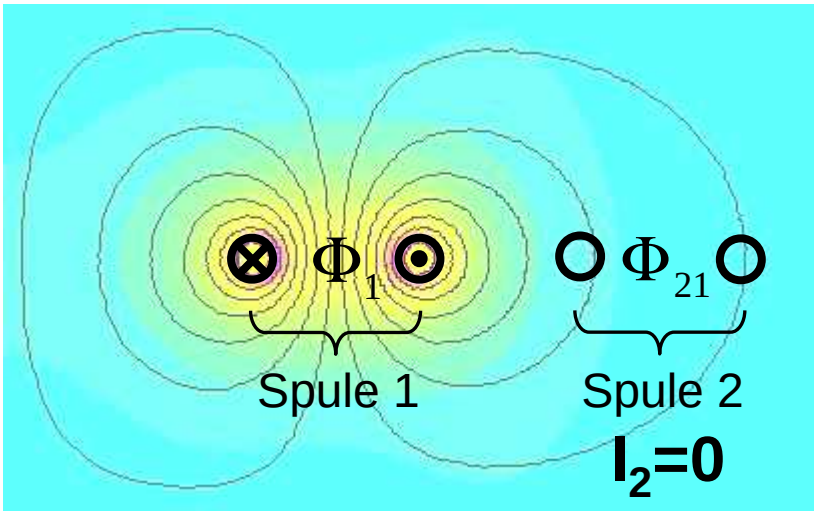
Die Selbstinduktivität einer Spule gibt den verketteten Fluß in den eigenen Windungen bezogen auf den dazu nötigen Strom an.

Verketteter Fluß: $\Psi = N \cdot \Phi$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N}{I}\frac{\Theta}{R_m} = \frac{N}{I}\frac{NI}{R_m}$$

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$

Magnetisch gekoppelte Spulen

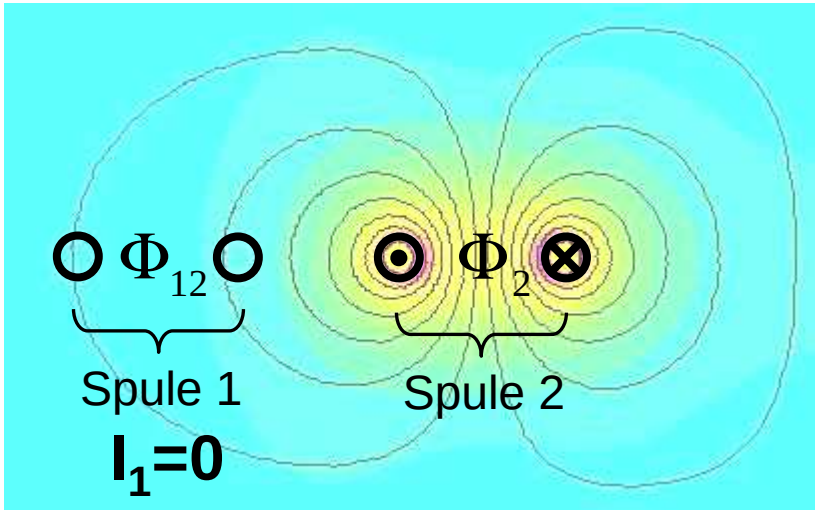


In Spule 1 von I_1 erzeugt:

Φ_1 … Spulenfluss

Φ_{21}… Hauptfluss (Koppelfluss)

Φ_{1S}… Streufluss



In Spule 2 von I_2 erzeugt:

Φ_2 … Spulenfluss

Φ_{12}… Hauptfluss (Koppelfluss)

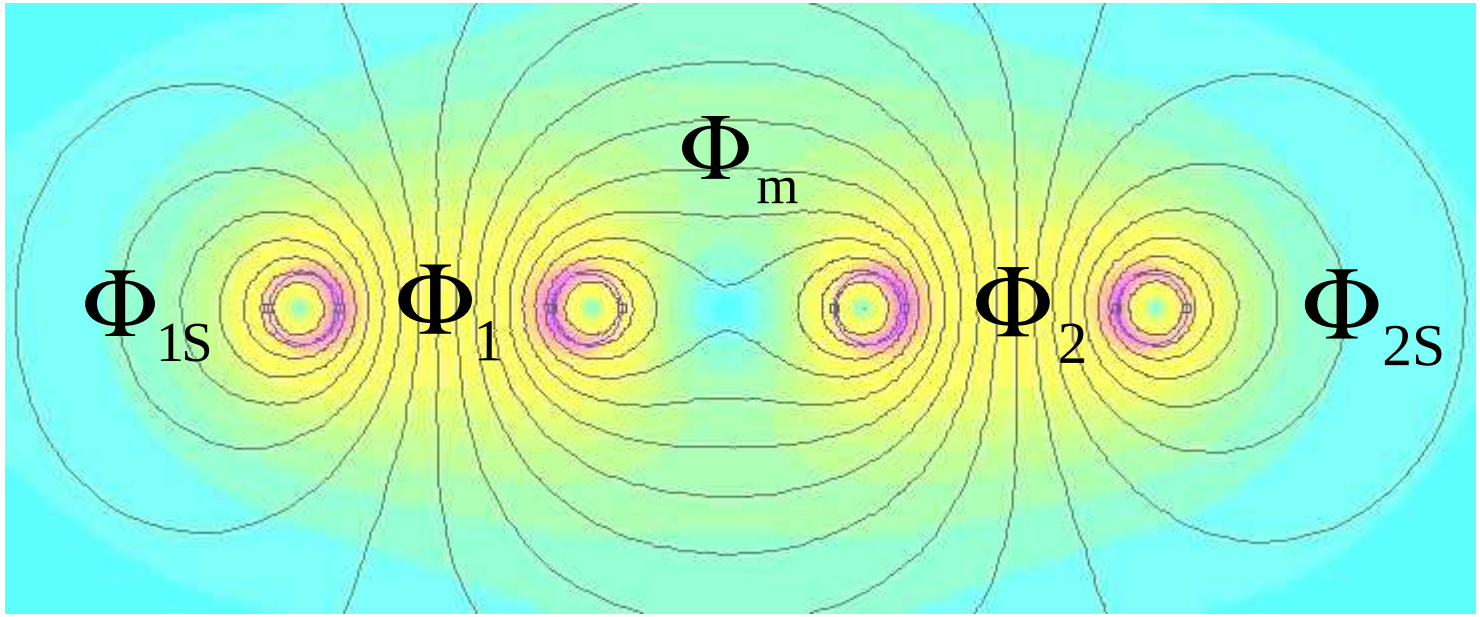
Φ_{2S}… Streufluss

Magnetisch gekoppelte Spulen

$I_1 \neq 0$

und

$I_2 \neq 0$



Streuflüsse: Φ_{1S} ,Φ_{2S}

Hauptflüsse: $\Phi_{21} = \Phi_1 - \Phi_{1S}$
$\Phi_{12} = \Phi_2 - \Phi_{2S}$

Koppelfluss: $\Phi_m = \Phi_{21} + \Phi_{12}$

Gegeninduktivität gekoppelter Spulen

Die Gegeninduktivität zweier Spulen gibt das Verhältnis des verketteten Flusses der einen Spule zu dem verursachenden Strom der anderen Spule an.

$$\frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} = \underbrace{M_{21} = M_{12}}_{\text{Gegeninduktivität M}} = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$$

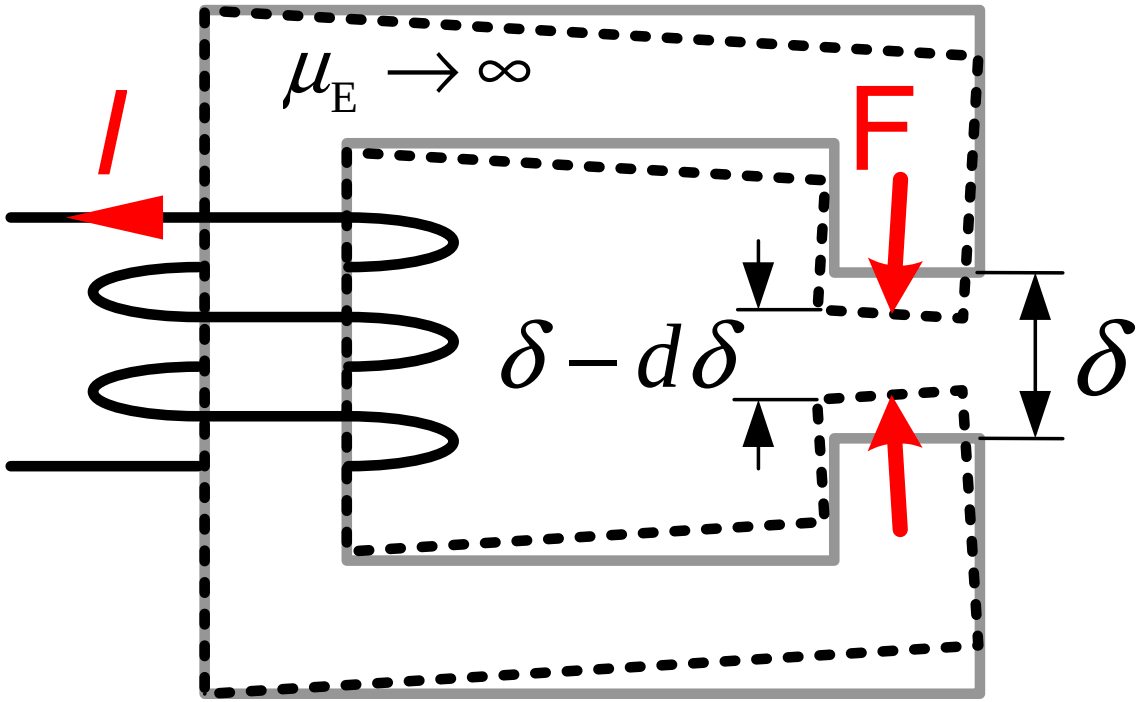
Verketteter Fluss in Spule 2, verursacht vom Strom I_1

Verketteter Fluss in Spule 1, verursacht vom Strom I_2

Koppelfaktor k

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} \quad k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_2} \quad k = \sqrt{k_1 k_2} \quad M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Kräfte bestimmen – Virtuelle Arbeit

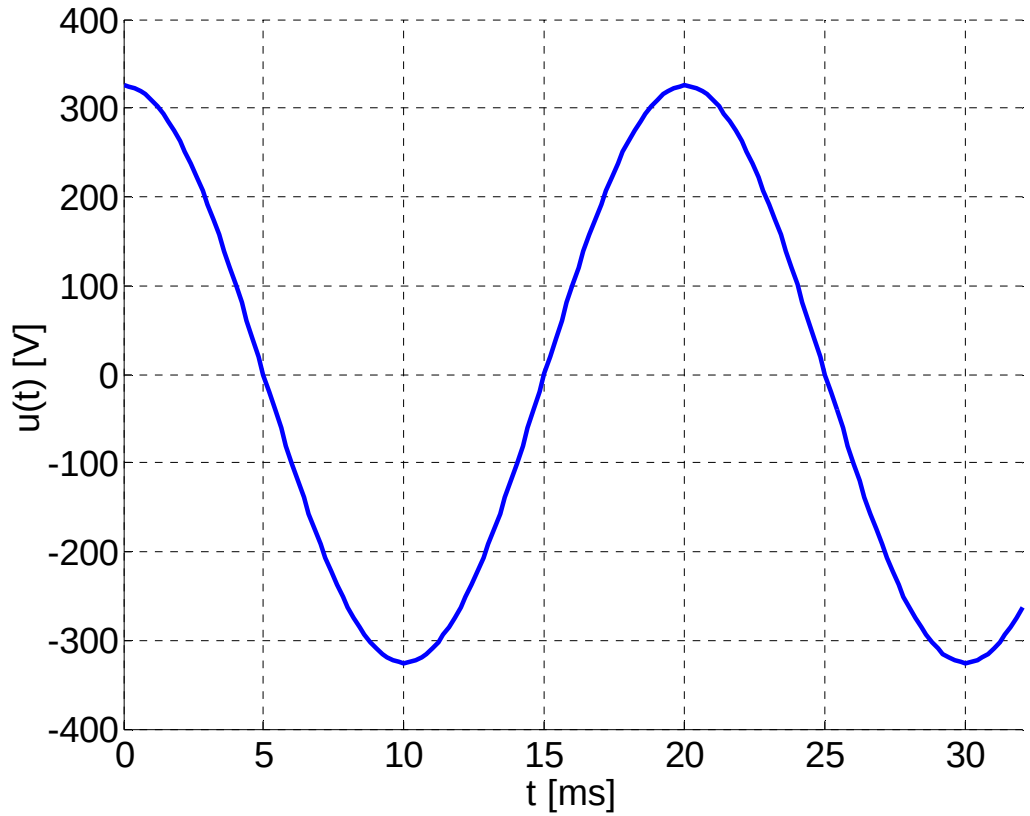


$$F = \frac{\partial W_{mag}}{\partial \delta}$$

$$\frac{\partial W_{mag}}{\partial \delta} = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{\partial L}{\partial \delta}$$

$$F = -\frac{\mu_0 A N^2}{2} \frac{I^2}{\delta^2}$$

Wechselspannung aus der Steckdose



Frequenz:

f = 50Hz

Effektivwert:

U = 230V

Mittelwert

Einzelwerte zusammenzählen und durch die Anzahl teilen.
Bzw: Über die Periode Integrieren und dadurch teilen.

Definition: $$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$$

Der Mittelwert einer gleichgerichteten Wechselspannung wird als Gleichrichtmittelwert bezeichnet.

Gleichrichtmittelwert: $$\bar{u} = \frac{\hat{u}}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cdot dx = \frac{2}{\pi}\hat{u}$$

Effektivwert

Der Effektivwert I_{eff} eines periodischen Stromverlaufs *i(t)* gibt den äquivalenten Gleichstrom an, der an einem ohmschen Widerstand die gleiche Verlustleistung bewirken würde.

Definition: $$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

Der Effektivwert einer Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ berechnet sich zu:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Zeitlicher Verlauf der Leistung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

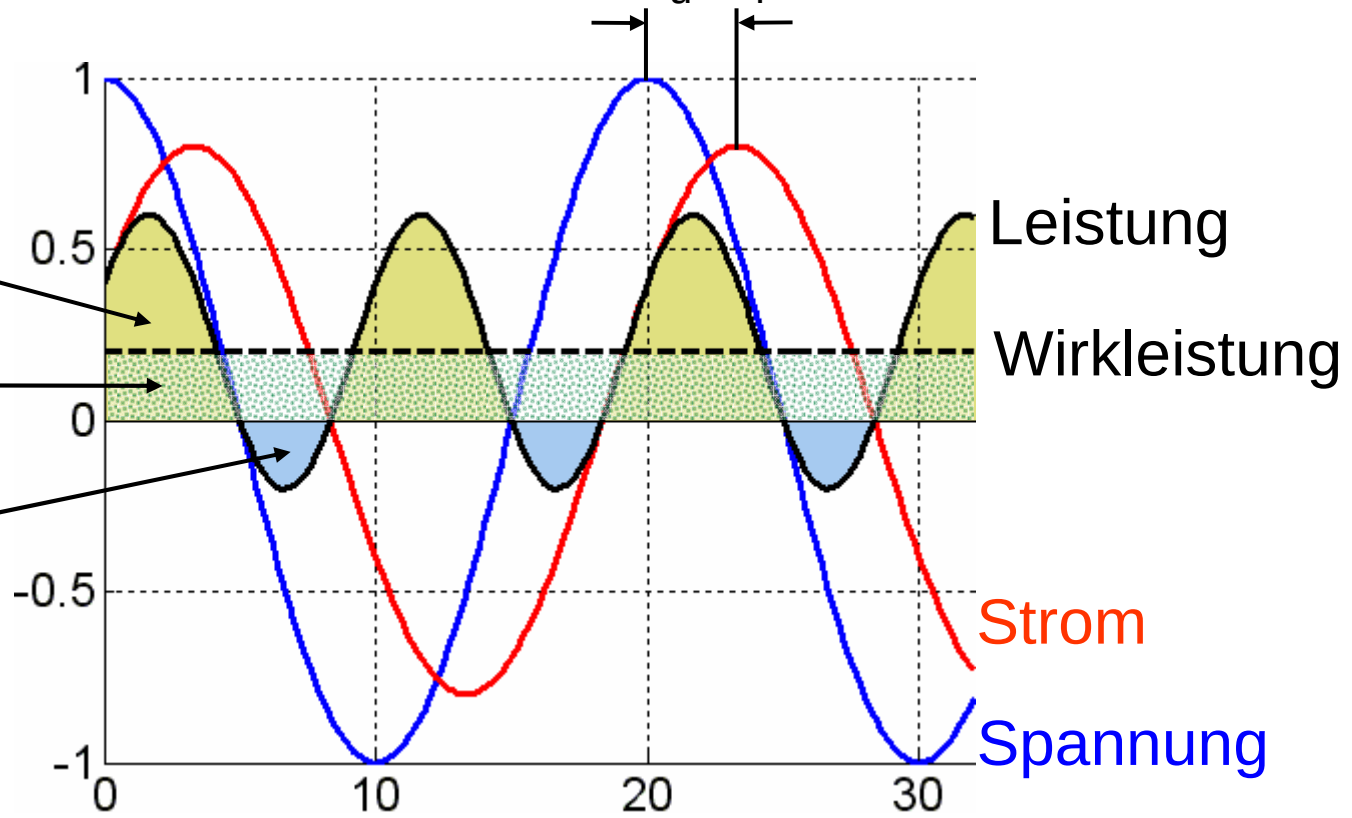
$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} (\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i))$$

Phase: $\varphi_u - \varphi_i$

Der Schaltung zugeführte Energie

Mittlere zugeführte Energie

Der Schaltung entnommene Energie



Eine vernünftige Erklärung zu Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung auch für Nicht-Elektrotechniker

Fourierreihen

Periodische Funktionen lassen sich durch eine Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktionen mit vielfachen der Grundfrequenz darstellen.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{c}^{c+\mathrm{T}} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{c}^{c+\mathrm{T}} f(t) \cdot \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

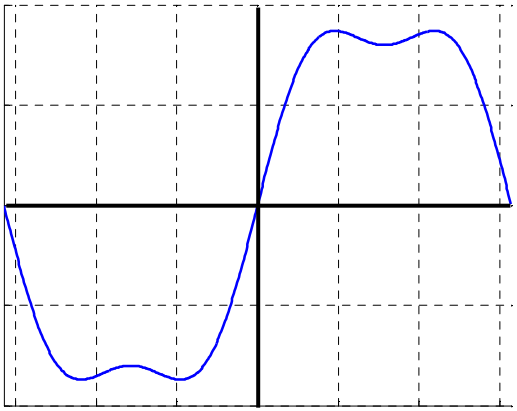
T … Periode von f(t)

$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$ … Winkelgeschw.

c … beliebige Konst.

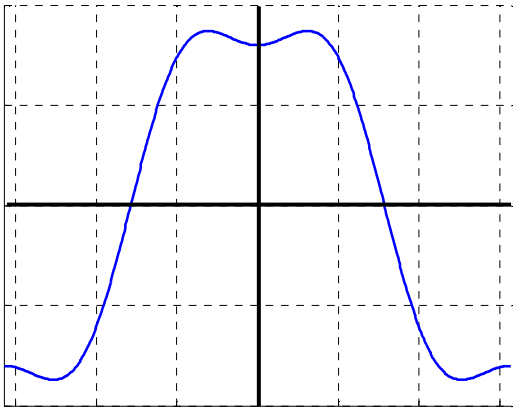
Fourierkoeffizienten

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt & \text{... falls f gerade} \\ 0 & \text{... falls f ungerade} \end{cases}$$



Ungerade Funktion

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{... falls f gerade} \\ \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,dt & \text{... falls f ungerade} \end{cases}$$



Gerade Funktion

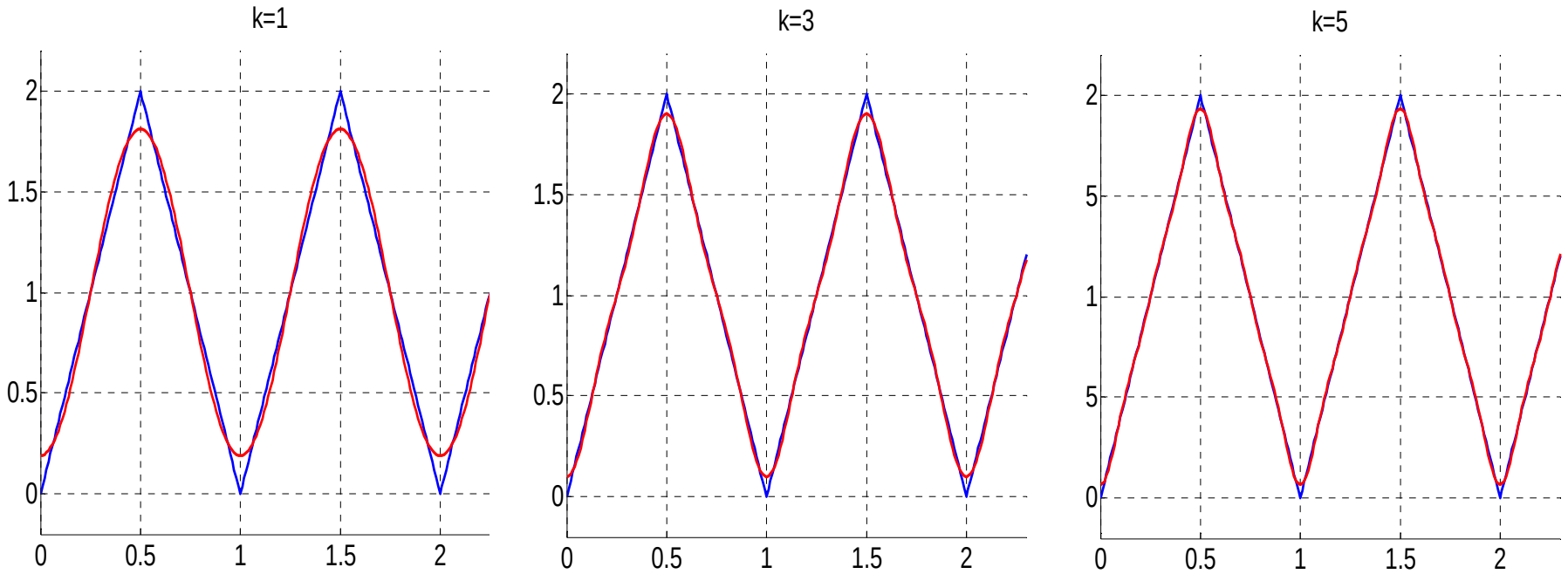
Fourierreihenentwicklung - Beispiel

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{2\hat{u}}{\mathrm{T}}\left(t-k\mathrm{T}\right) & \text{... für } k\mathrm{T}\le \mathrm{t}<\left(\mathrm{k}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{T}\\ -\dfrac{2\hat{u}}{\mathrm{T}}\left(t-\left(\mathrm{k}+1\right)\mathrm{T}\right) & \text{... für } \left(\mathrm{k}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{T}\le \mathrm{t}<\left(\mathrm{k}+1\right)\mathrm{T}\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{4\hat{u}}{\pi^2 n^2} & \text{... n ungerade}\\ 0 & \text{... n gerade}\end{cases}\qquad a_0=\frac{\hat{u}}{2}$$

$$u(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n\cos(n\omega t)$$

Fourierreihenentwicklung - Beispiel



Mit steigender Anzahl an Reihengliedern, entspricht die Fourierreihe immer besser dem Original.

Frequenzabhängigkeit im Wechselstromnetzwerk

- Komplexe Zeiger
- Ortskurven der Impedanzen von RLC-Gliedern
- Übertragungsfunktion
- Bodediagram (Betrags- und Phasengang)
- Logarithmisches Verhältnis, Dezibel
- Passive Filter, Hoch-, Band-, Tiefpass bzw. -sperre
- RLC - Reihenresonanzkreis

Komplexe Zahlen - Darstellungsweisen

Kartesische Form $\underline{x} = \mathrm{Re}\{\underline{x}\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\{\underline{x}\}$

$$X = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{\underline{x}\} + \mathrm{Im}^2\{\underline{x}\}}$$

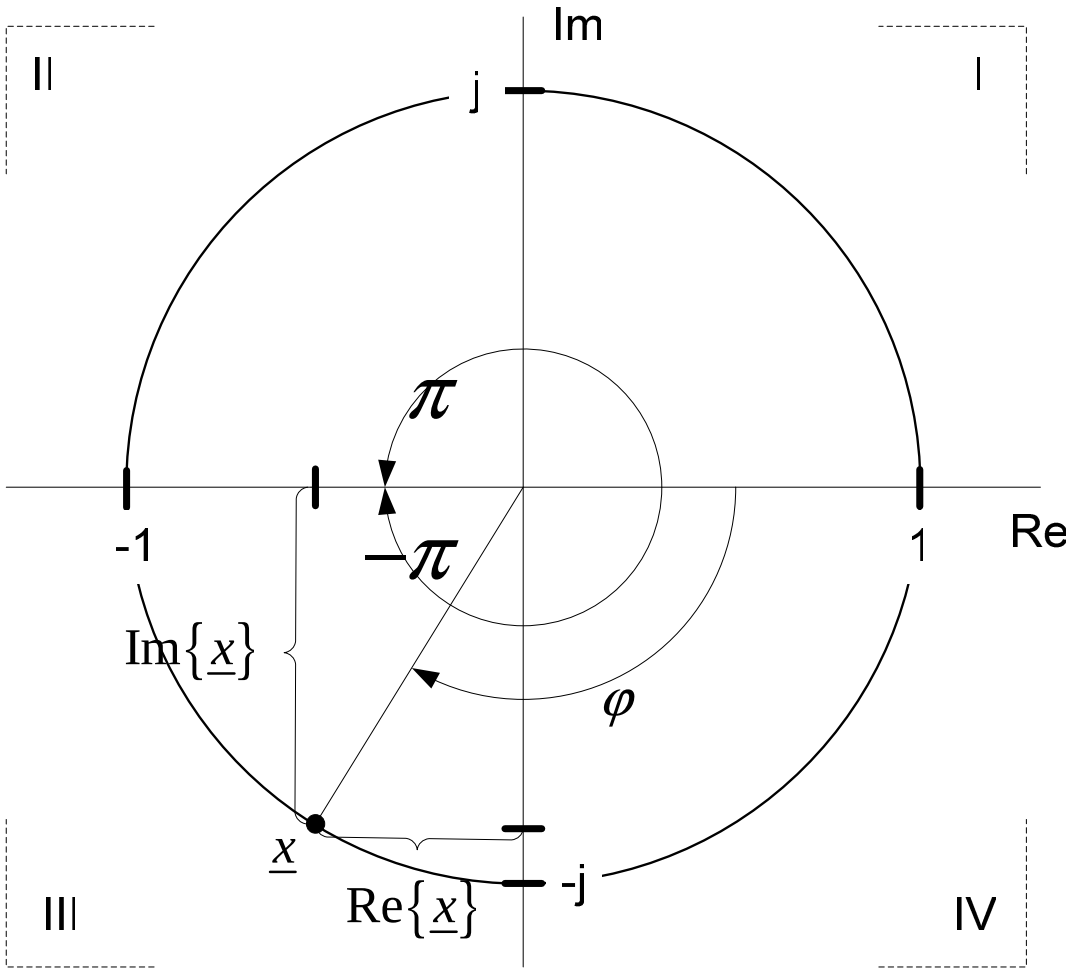
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{x}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{x}\}}\right)$$

$$\underline{x} = X\cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot X\sin(\varphi)$$

$$\mathrm{j}^2 = -1$$

Exponentialform $\underline{x} = X \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$

Komplexe Zahlen - Phasenwinkel



$$\underline{x} = e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && \varphi = \alpha \\ &\text{II} && \varphi = \pi - \alpha \\ &\text{III} && \varphi = -\pi + \alpha \\ &\text{IV} && \varphi = -\alpha \end{aligned}$$

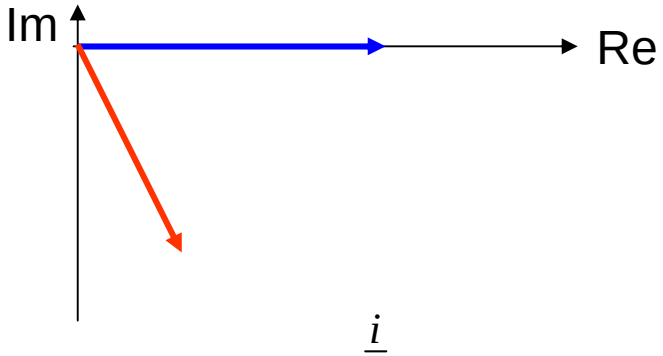
α … Winkel zur Re-Achse

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{\mathrm{Im}\{\underline{x}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{x}\}}\right|\right)$$

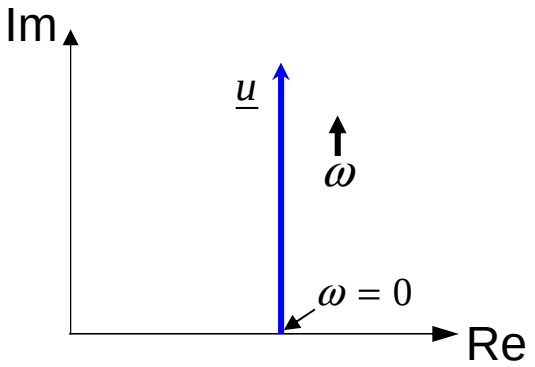
Betrag!!

Übertragungsverhalten von Wechselgrößen

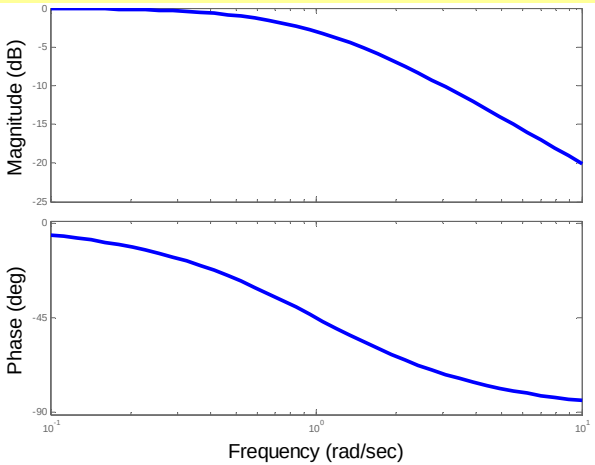
Zeigerdiagramm



Ortskurve



Bodediagramm



Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \frac{|\underline{u}_a| \cdot e^{j\varphi_a}}{|\underline{u}_e| \cdot e^{j\varphi_e}} = |H(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Ortskurven

Die Ortskurve, entpricht der Bahnkurve der Endpunkte eines Zeigers in der komplexen Ebene bei Variation eines Parameters des Zeigers.

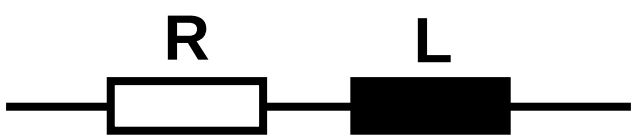
Darstellung von:

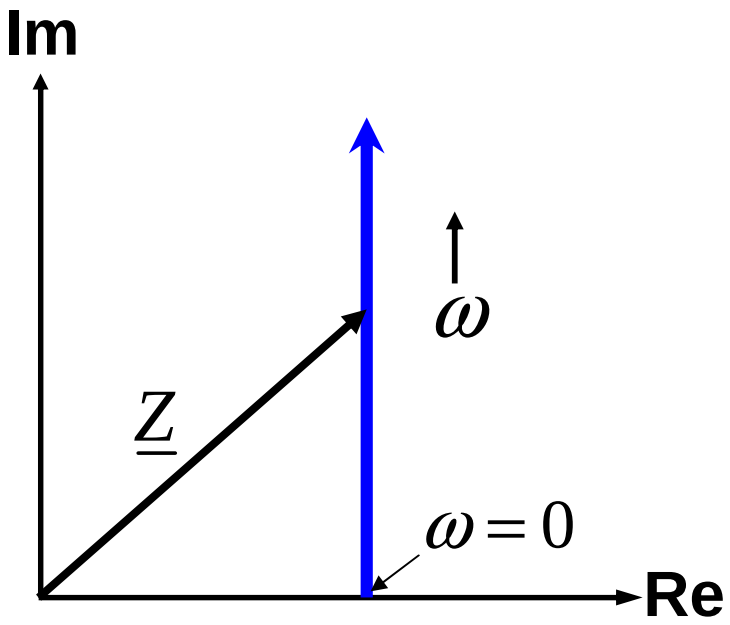
Impedanzen, Admittanzen, Spannungen, Ströme, Übertragungsfunktionen

In Abhängigkeit von:

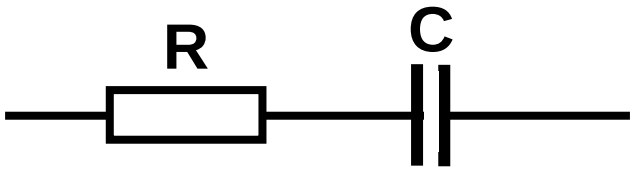
z.B. Widerstand, Kapazität, Induktivität, Frequenz

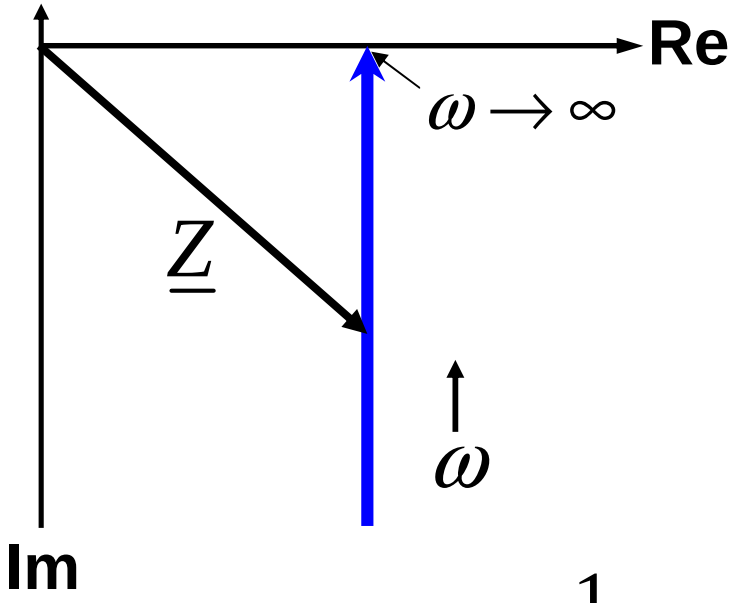
Ortskurven von Impedanzen





$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$$

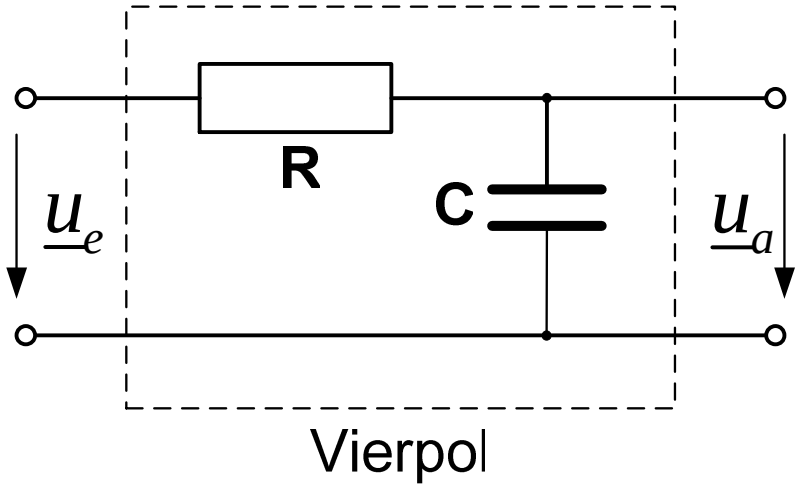




$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Vierpols gibt an, wie ein sinusförmiges Eingangssignal, abhängig von der Frequenz, in Amplitude und Phase verändert wird.



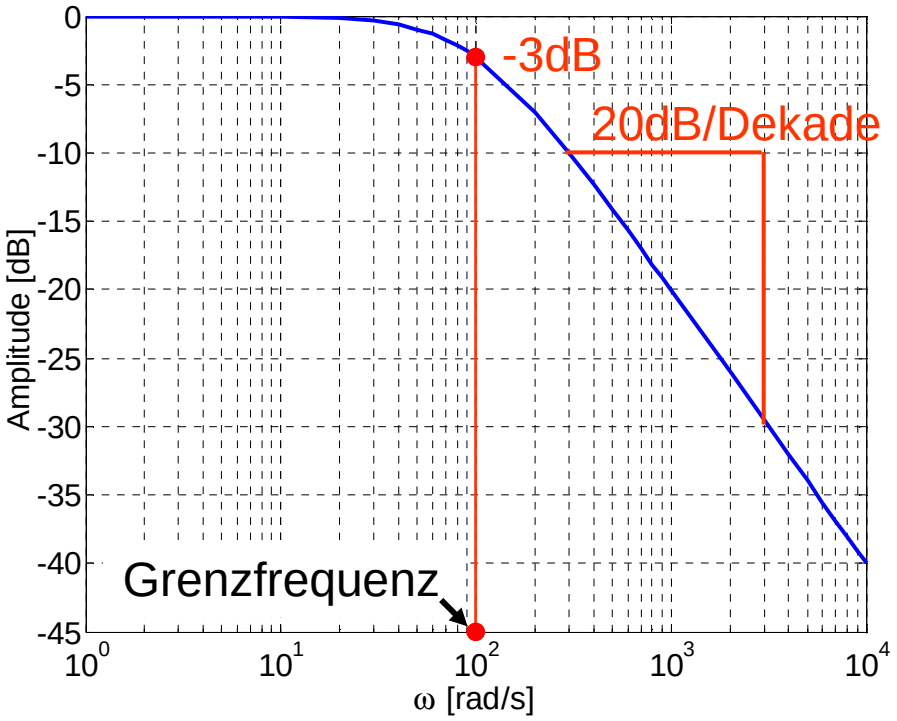
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_a(\omega)}{\underline{u}_e(\omega)}$$

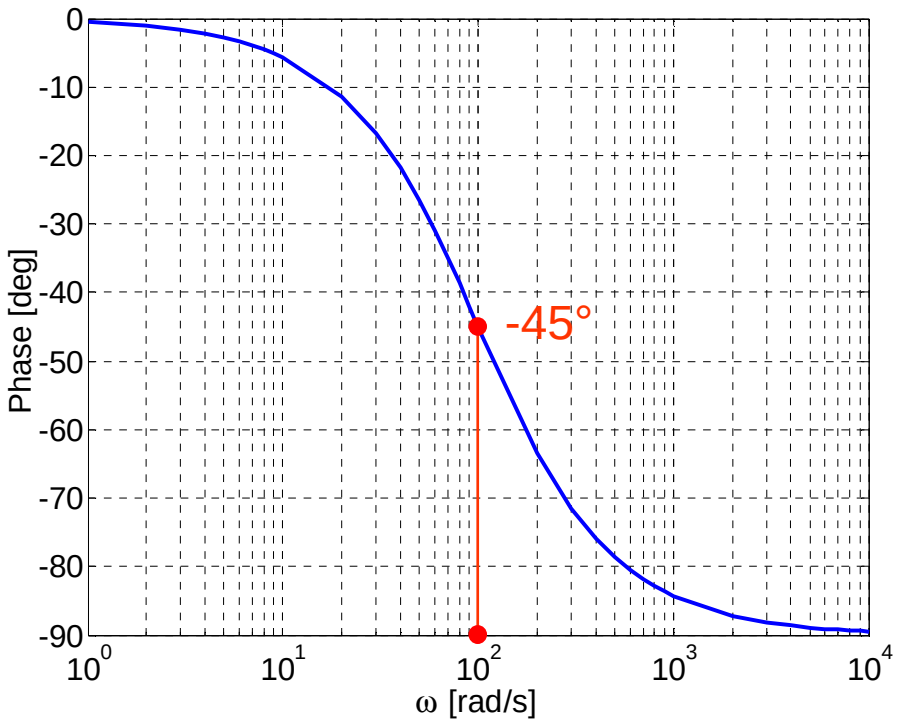
$$|\underline{u}_a| = |\underline{u}_e| \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}}_{\text{Amplitudengang}}$$

$$\arg(\underline{u}_a) = \arg(\underline{u}_e) + \underbrace{\arctan(-\omega\tau)}_{\text{Phasengang}}$$

Bodediagramm

Das Bodediagramm ist eine graphische Darstellung von Amplituden- und Phasengang über der Kreisfrequenz.





Logarithmisches Verhältnis - Dezibel

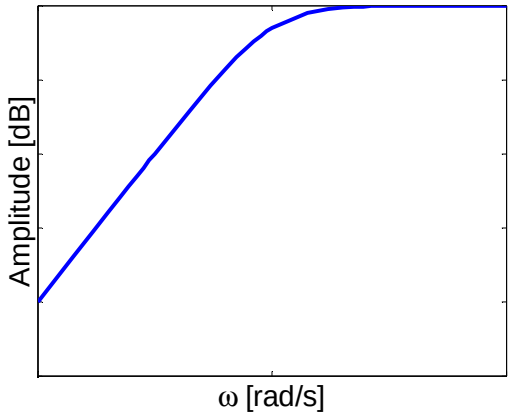
Die logarithmische Darstellung des Verhältnisses zweier Spannungen:

$$\text{dB-Zahl} = 20 \cdot \log\left(\frac{u_a}{u_e}\right) = 20 \cdot \log H(\omega)$$

H	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10^{1}	10^{2}	10^{3}
dB	-60	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40	60

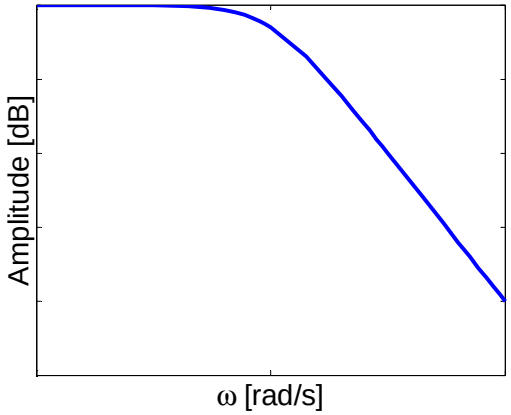
Passive Filter

Hochpass

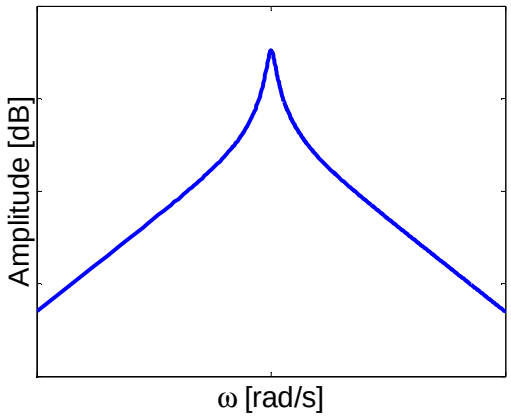


1. Ordnung
→ RC oder LC

Tiefpass

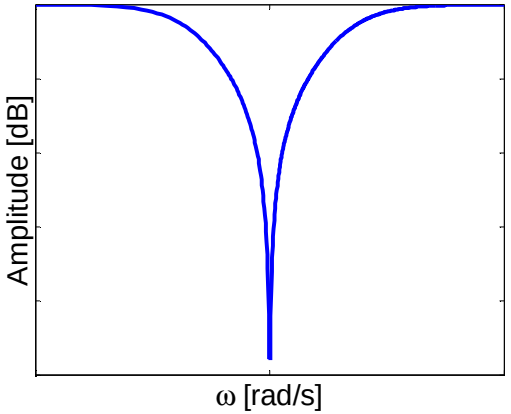


Bandpass

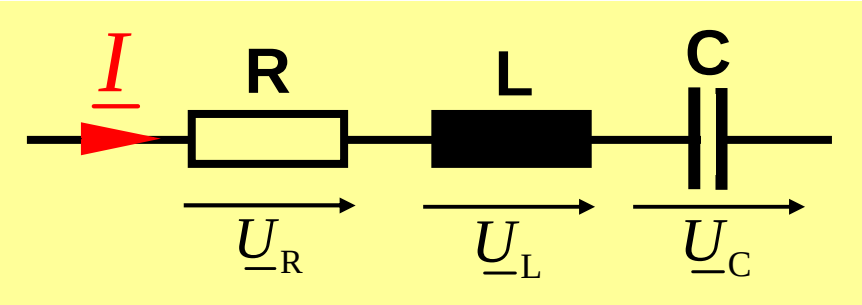


2. Ordnung
→ RLC

Bandsperre



Passive Filter: RLC-Reihenschwingkreis



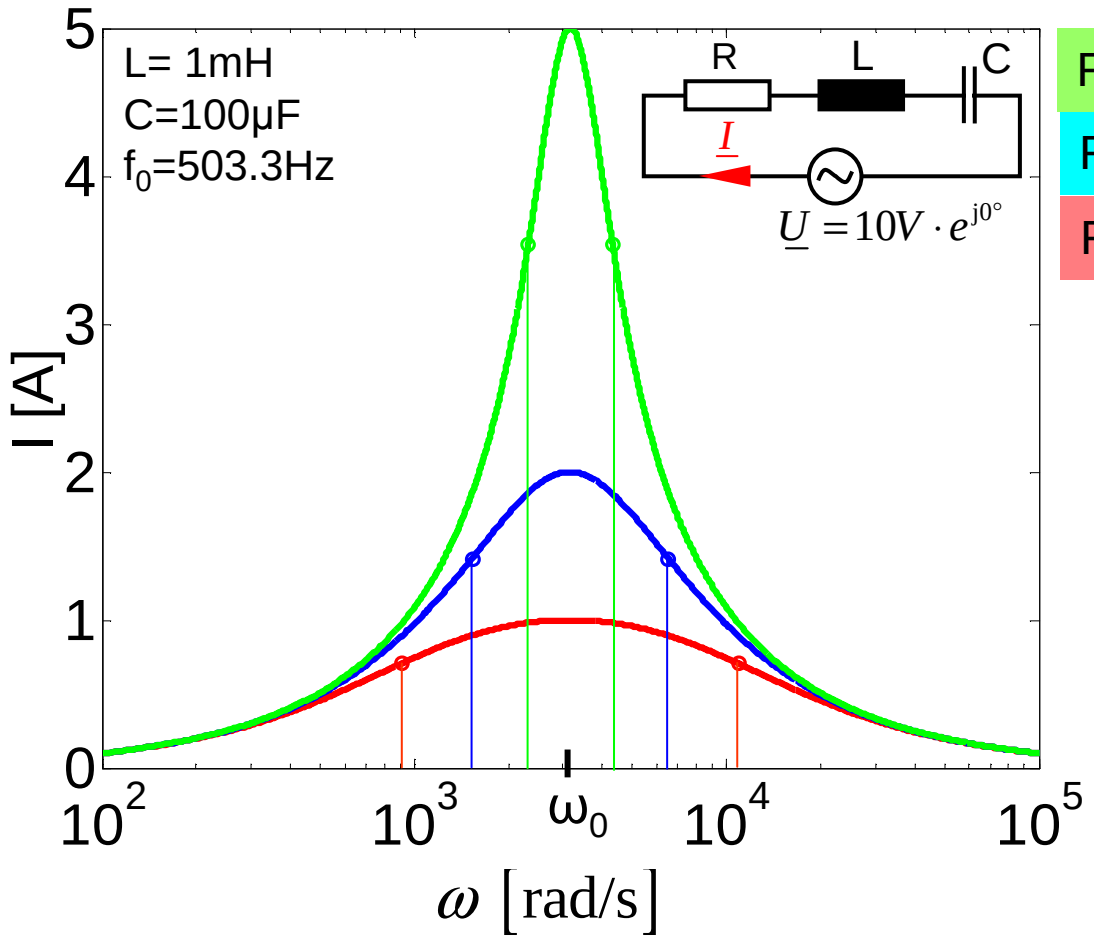
Impedanz: $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega \mathrm{L} - \frac{1}{\omega \mathrm{C}}\right)$

Resonanzfrequenz: $\mathrm{Im}\left\{\underline{Z}\left(\omega_0\right)\right\} := 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$

Güte: $Q = \frac{P_{Blind}}{P_{Wirk}} = \frac{\omega_0 \mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\omega_0 \mathrm{RC}}$

Dämpfung: $d = \frac{1}{Q}$

Bandbreite, Güte



R=2Ω	Q=1.5811	Δf=318Hz
R=5Ω	Q=0.6325	Δf=796Hz
R=10Ω	Q=0.3162	Δf=1592Hz

Grenzfrequenzen:

$$\omega_{1/2} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Bandbreite:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

Güte: $Q = \frac{1}{\Delta\omega}$

Klausur – Grundlagen der Elektrotechnik

Neuer Zyklus	Alter Zyklus
Bachelor → V.W, MB, ITMW, PI, Lehramt	Diplom (mit Ergänzungen) GET I+II Ergänzungen I+II UE, PR, Rep bzw. M&W-Labor
Diplom → Matrix	Diplom (ohne Ergänzungen) GET I+II UE, PR, Rep bzw. M&W-Labor

Vorraussichtlicher Termin: 8.3.2008

Messtechnik, Sensorik

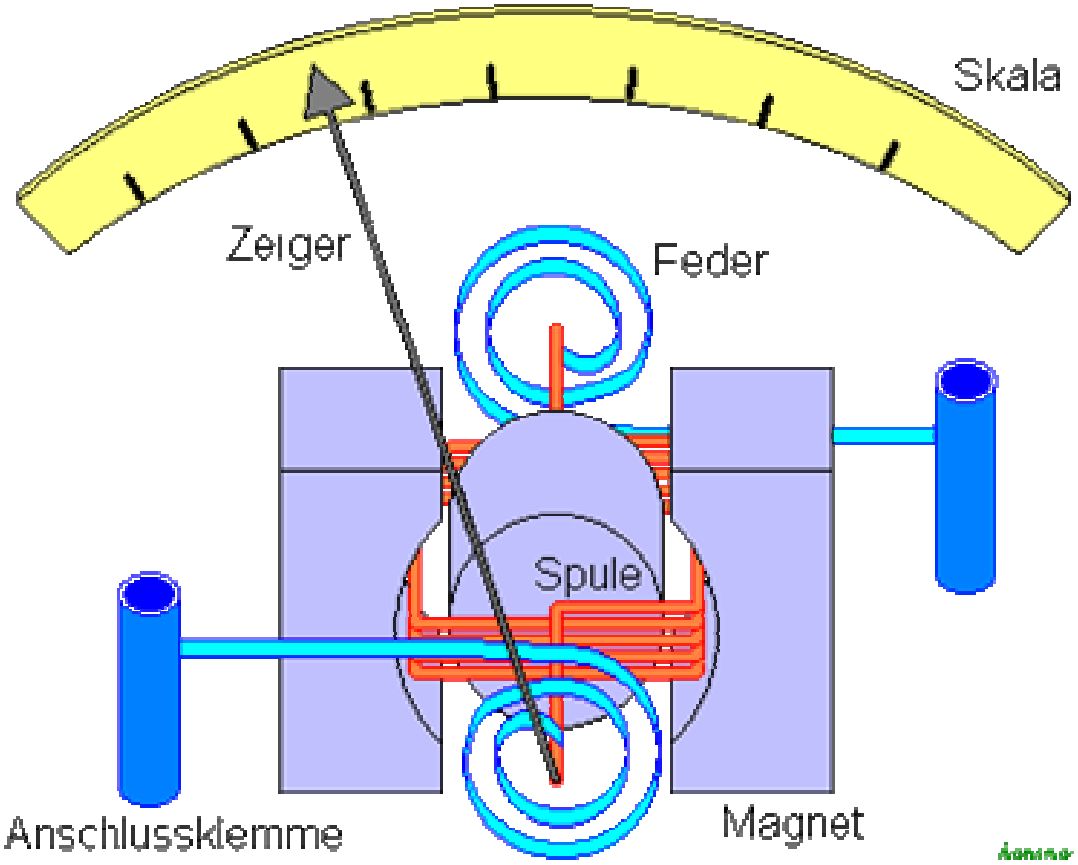
- Drehspulmessinstrument
- Dreheisenmessinstrument
- Digitalmultimeter
- Strom- und spannungsrichtiges Messen
- Messbereichserweiterung
- Prinzip eines Sensors
  (Bsp: Kompensationswandler, optischer Sensor)
- Grundbegriffe der Messtechnik

Elektrische Messtechnik

Digital-Multimeter

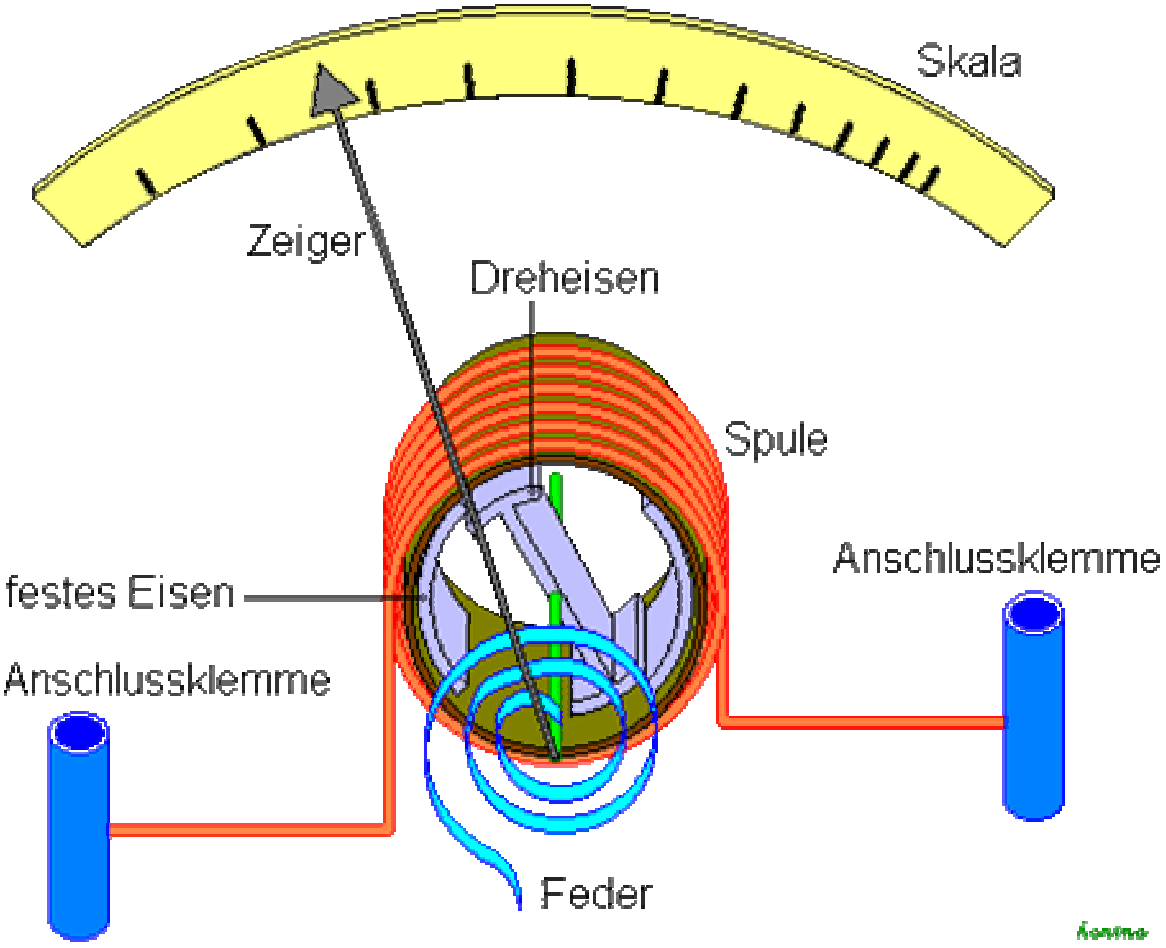
Analogmultimeter

Drehspulmessinstrument



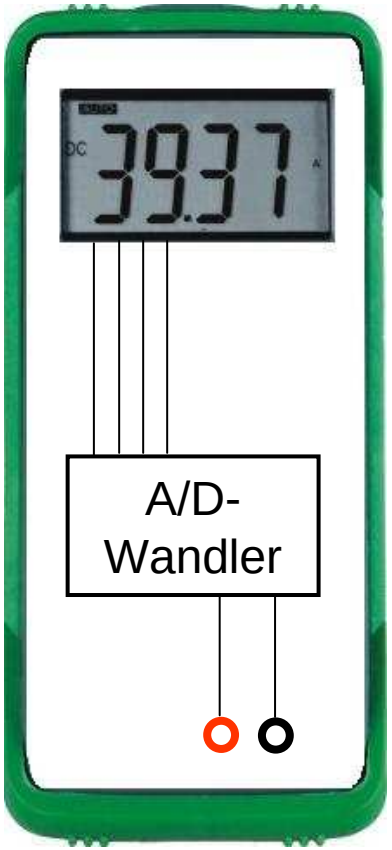
- Zeigerausschlag ist polaritätsabhängig
- Zeigt den arithmetischen Mittelwert an
- Lineare Skala

Dreheisenmessinstrument



- Zeigerausschlag ist nicht polaritätsabhängig
- Zeigt den Effektivwert an
- Nichtlineare Skala

Digital-Multimeter

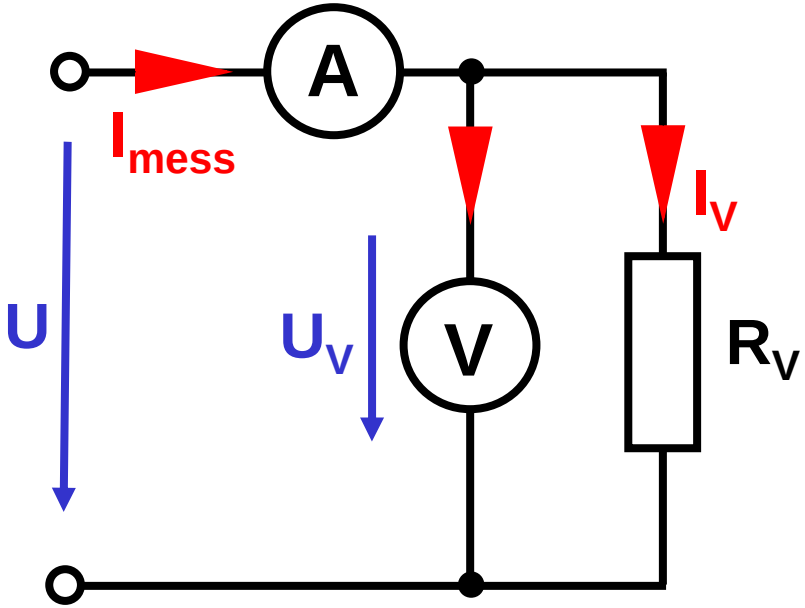


Misst Strom & Spannung

je nach Ausführung:
+ Widerstand
+ Kapazität
+ Induktivität
+ Frequenz

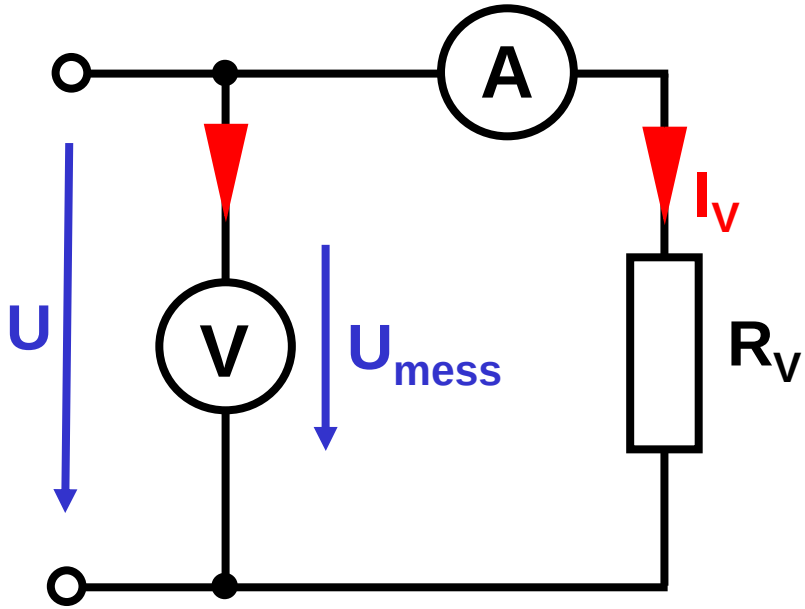
- Nicht mechanisch
- benötigt Batterie
- Eingangswiderstand: 1..10MΩ

Spannungs- und Strommessung



Spannungsrichtige Messung

U_V ✓ $\quad I_V = I_{mess} - \frac{U_V}{R_{iV}}$



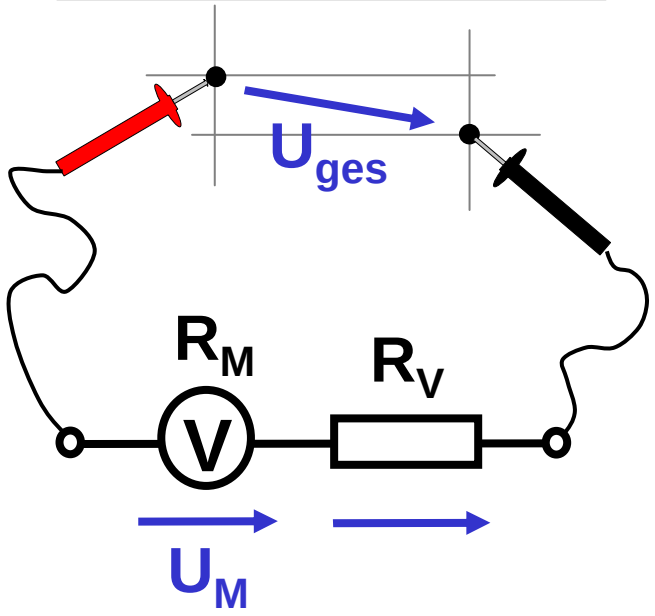
Stromrichtige Messung

I_V ✓ $\quad U_V = U_{mess} - I_V R_{iA}$

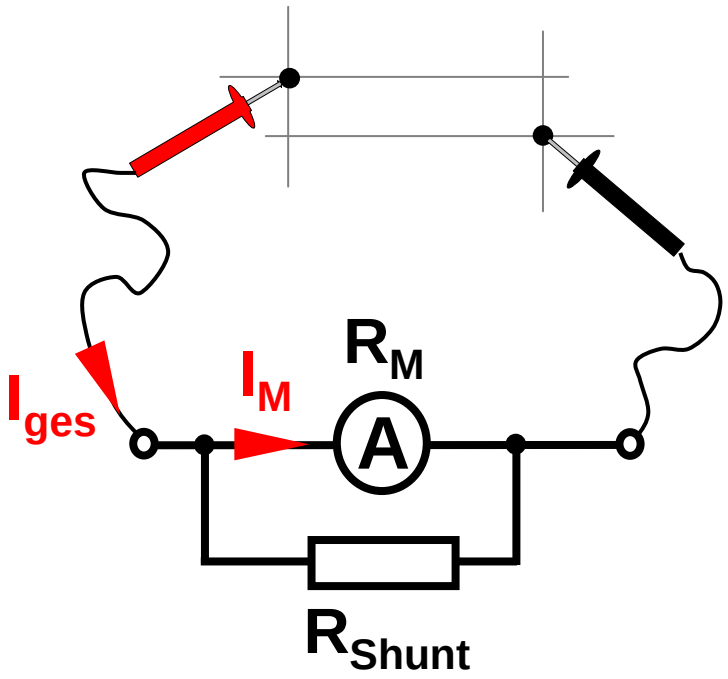
Messbereichserweiterung

Die zu messenden Spannungen oder Ströme müssen schaltungstechnisch auf Bereiche abgebildet werden, die für das Messwerk zulässig sind.

Spannungen oberhalb des Messbereichs



Ströme oberhalb des Messbereichs



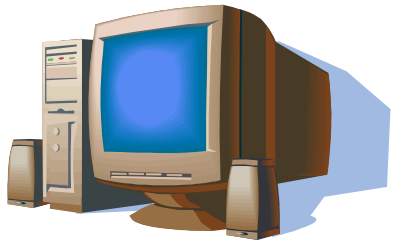
Sensorik

Ein Sensor wandelt eine Messgröße mit Hilfe eines physikalischen Effekts in ein elektrisches Signal um.

Messgröße
(physikalische, biologische, chemische)

Physikalischer Effekt

Sensorsignal
(Strom, Spannung, digital, analog)

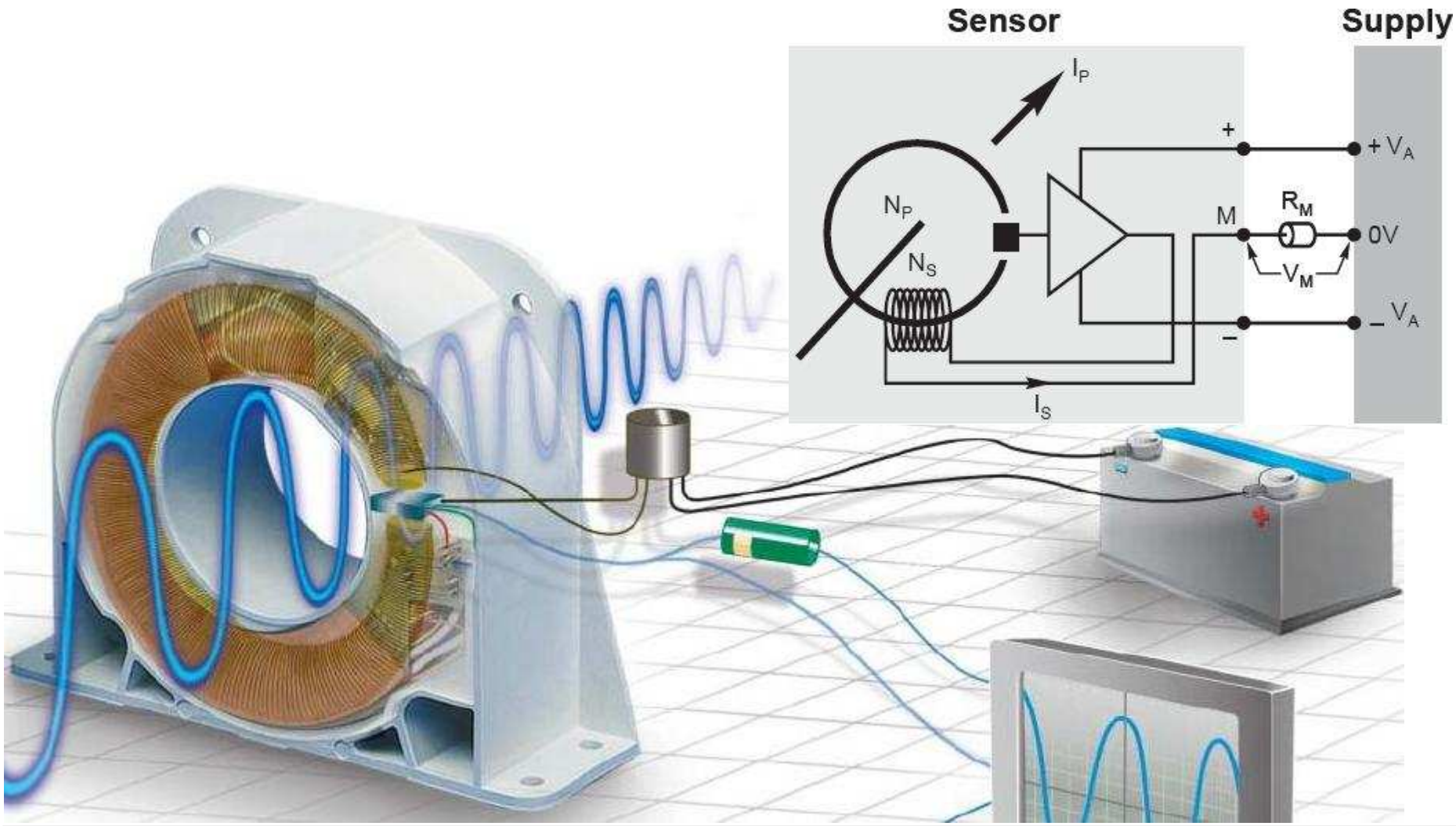


Auswertung

Sensor:

Aufnehmer
(berührend, berührungslos)
Signalaufbereitung
(Wandlung, Verstärkung)

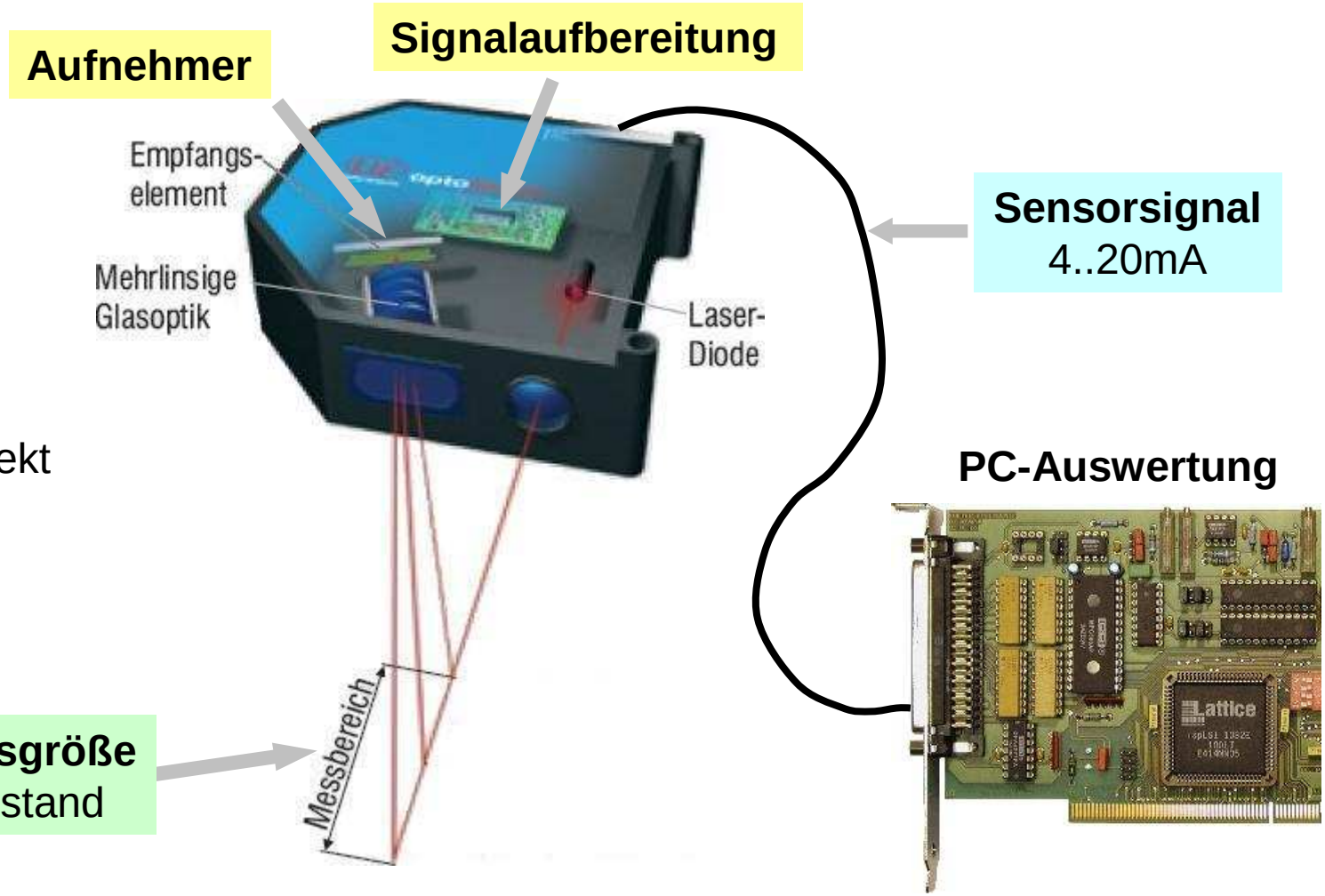
Kompensationsstromwandler



Optischer Sensor - Triangulation

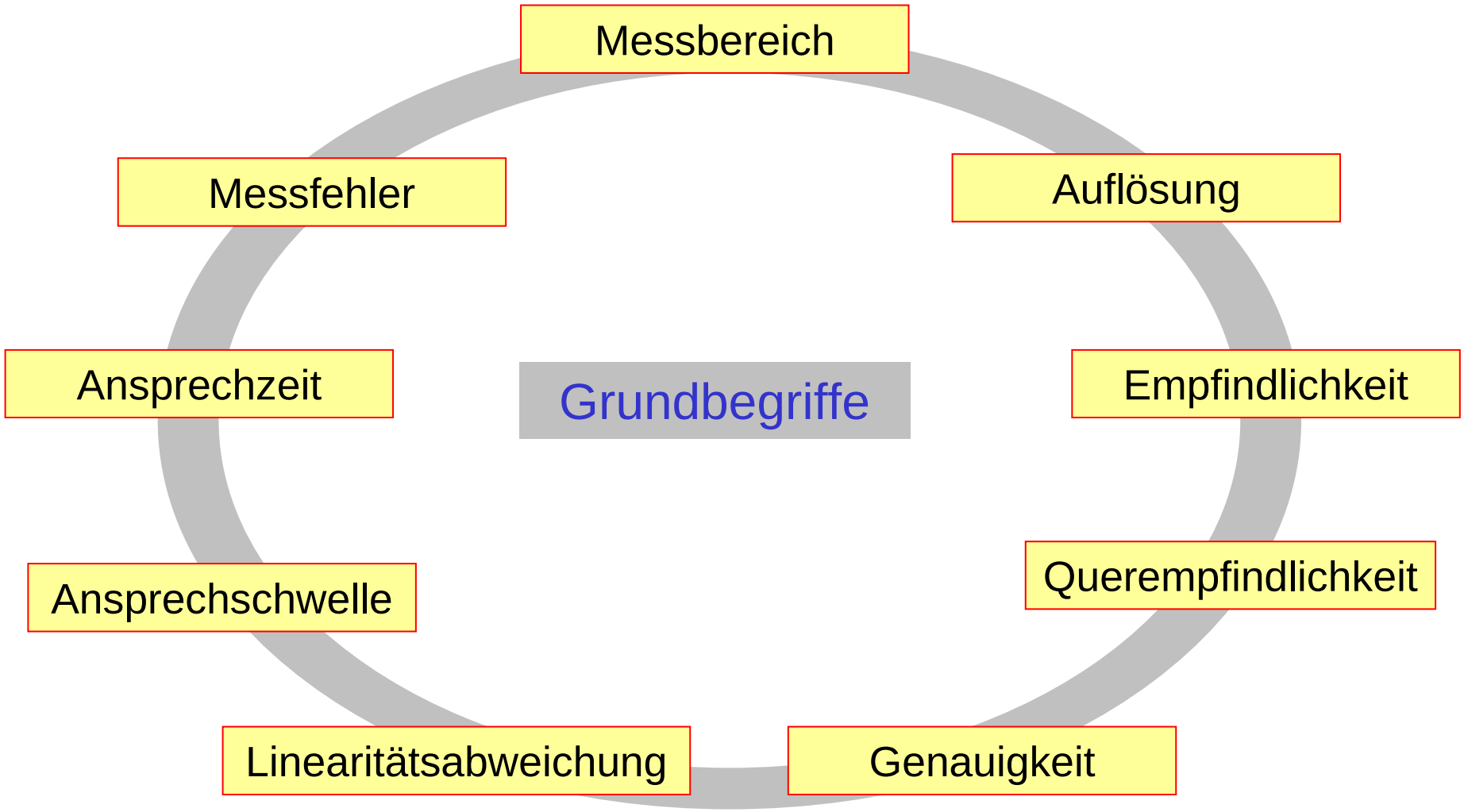
Physikalische Effekte:

- Reflexion
- Linsenoptik
- lateraler Fotoeffekt



Kenngrößen optischer Distanzsensoren

Übersicht	Messbereich	Auflösung	Linearität	Grenzfrequenz
Typ 1	20 ... 200 mm	0,02 % d.M.	<± 0,2 % d.M.	500 Hz
Typ 2	5 ... 250 mm	0,01 % d.M.	<± 0,2 % d.M.	1 kHz
Typ 3	0,5 ... 200 mm	0,03 % d.M.	<± 0,2 % d.M.	37 kHz
Typ 4	2 … 750 mm	0,005 % d.M.	<± 0,08 % d.M.	2,5 kHz
Typ 5	2 ... 200 mm	0,0015 % d.M.	<± 0,03 % d.M.	10 kHz
Typ 6	2 ... 200 mm	0,0015 % d.M.	<± 0,03 % d.M.	20 kHz
	⇩			
Mögliche Konfiguration:	100mm	0,15mm	3mm	

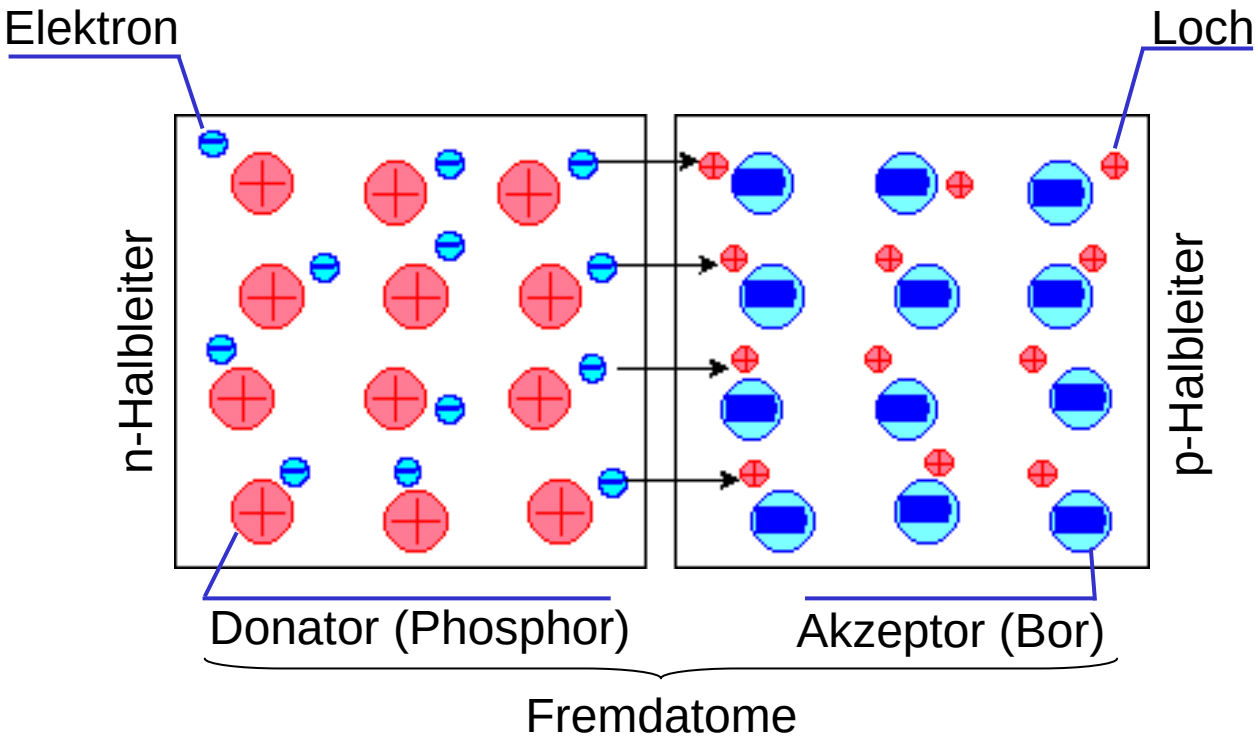

Messbereich
Auflösung
Empfindlichkeit
Querempfindlichkeit
Genauigkeit
Linearitätsabweichung
Ansprechschwelle
Ansprechzeit
Messfehler
Grundbegriffe

Halbleiterbauelemente

- PN-Übergang
- Kennlinie einer Diode
- Kennlinie einer Zener-Diode
- Spannungsstabilisierung mit Z-Dioden
- Bipolartransistor

P-N-Halbleiter vor Kontaktierung

Durch Einbringen von Fremdatomen in das homogene Kristallgitter (Si, Ge, GaAs) entstehen dotierte Halbleiter.



RG2

Grundmaterial: Silizium, regelmäßiges Kristallgitter, 4-wertig
Donator: Phosphor, 5-wertig, ein Aussenelektron zu viel für das regelmäßige Gitter
Akzeptor: Bor, 3-wertig, ein Aussenelektron zu wenig für das regelmäßige Gitter

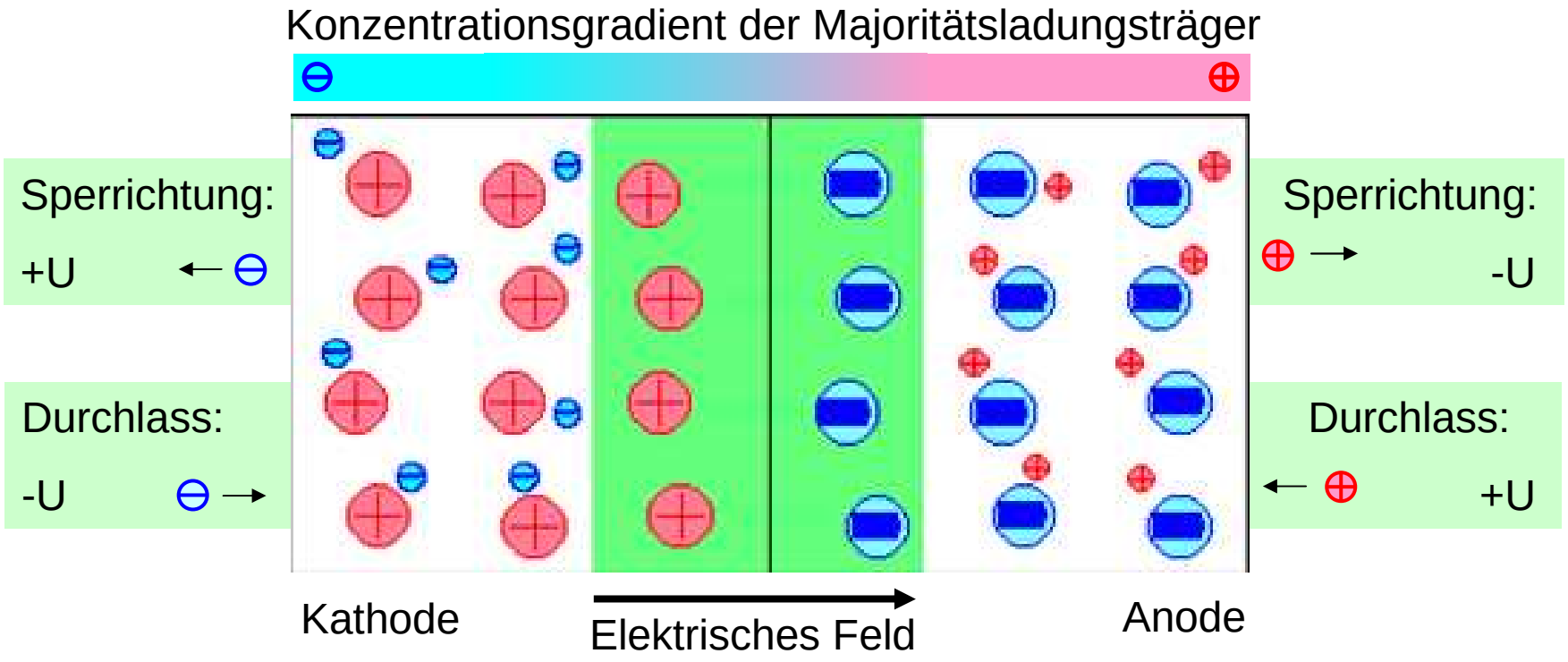
n,p-Halbleiter für sich neutral!

--> Elektronen, Löcher: Ladungsträgergradient

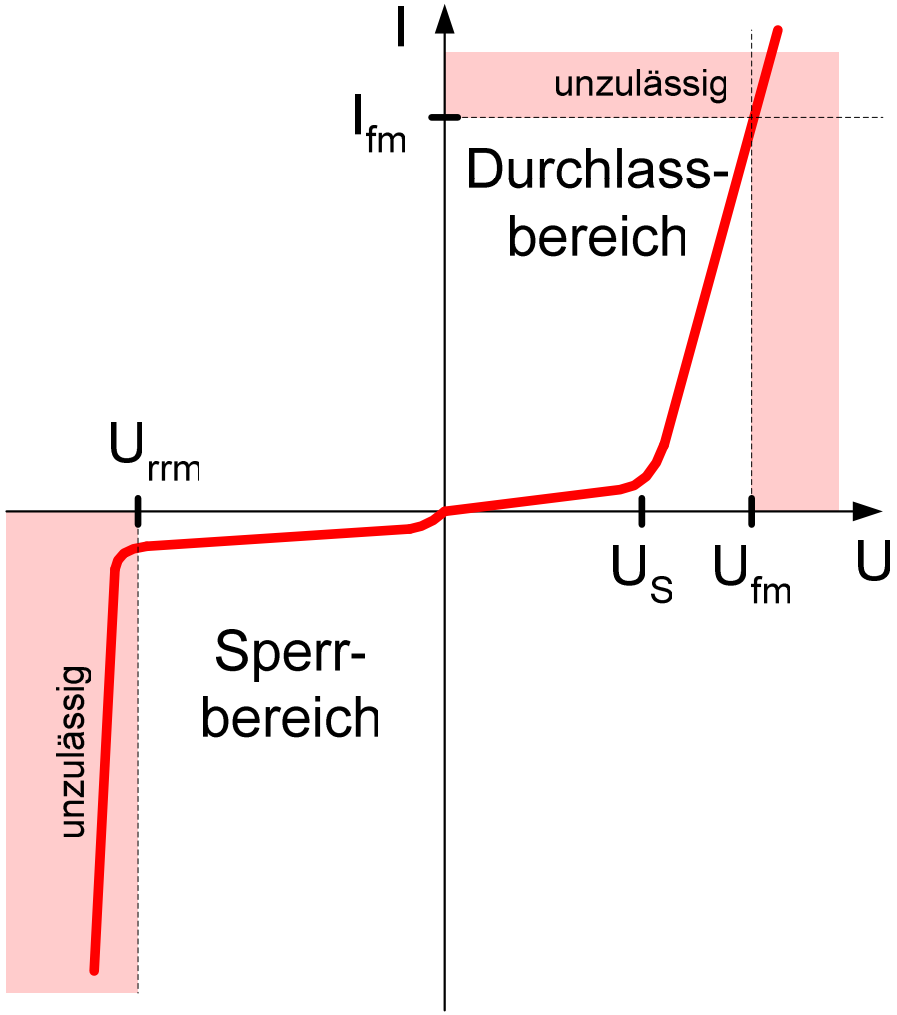
Grune; 10.12.2007

PN-Übergang: Sperrschicht

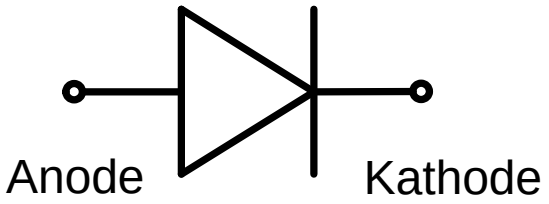
Durch Ladungsträger-Diffusion bildet sich eine hochohmige Raumladungzone bzw. Sperrschicht aus. Diffusionskraft und elektrische Feldkraft sind im Gleichgewicht.



Diodenkennlinie



Schaltzeichen:



I_{fm} … maximal zulässiger Dauerstrom in Vorwärtsrichtung

U_{fm} …maximale Diodenspannung (in Vorwärtsrichtung)

U_S …Schwellspannung, ab der ein signifikater Stromflus einsetzt

U_{rrm}…maximale Sperrspannung (in Rückwärtsrichtung)

Halbleiterdioden

I_{fm} (A)	640
U_{rrm} (V)	2400
U_{fm} (V)	2,1
I_{fsm} (A)	6050

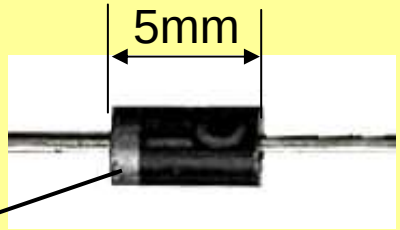
Leistungsdiode

Einsatz:
z.B. in Drehstrom-Brücken-gleichrichtern für Gleichstrom-bahnen

Diode (kleine Leistung)

Einsatz:
z.B. Freilaufdiode einer Relaisspule auf Leiterplatte

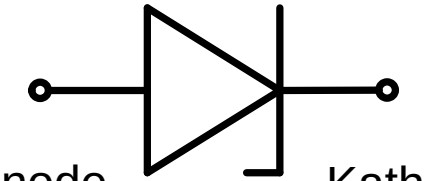
Markierungsring für die Kathode



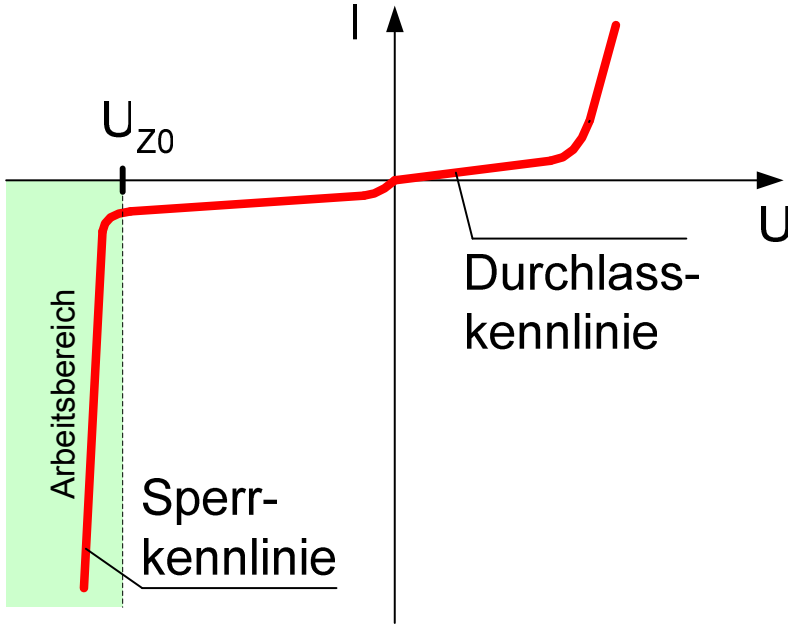
I_{fm} (A)	1,0
U_{rrm} (V)	60,0
U_{fm} (V)	0,57
I_{fsm} (A)	75,0

Z-Diode

Schaltzeichen:

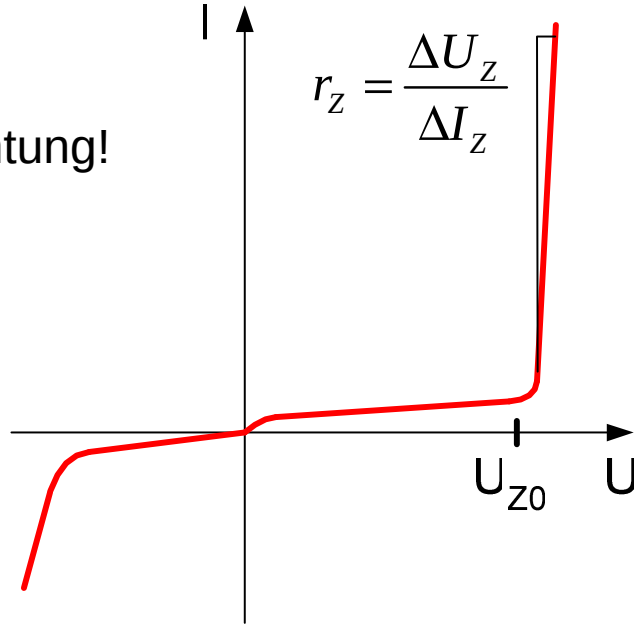


Eine dünne Sperrschicht führt schon bei geringen Spannungen zum Durchbruch gemäß dem sog. Zener-Effekt.
Dieser Durchbruch ist reversibel, solange der Strom dabei ausreichend begrenzt wird.

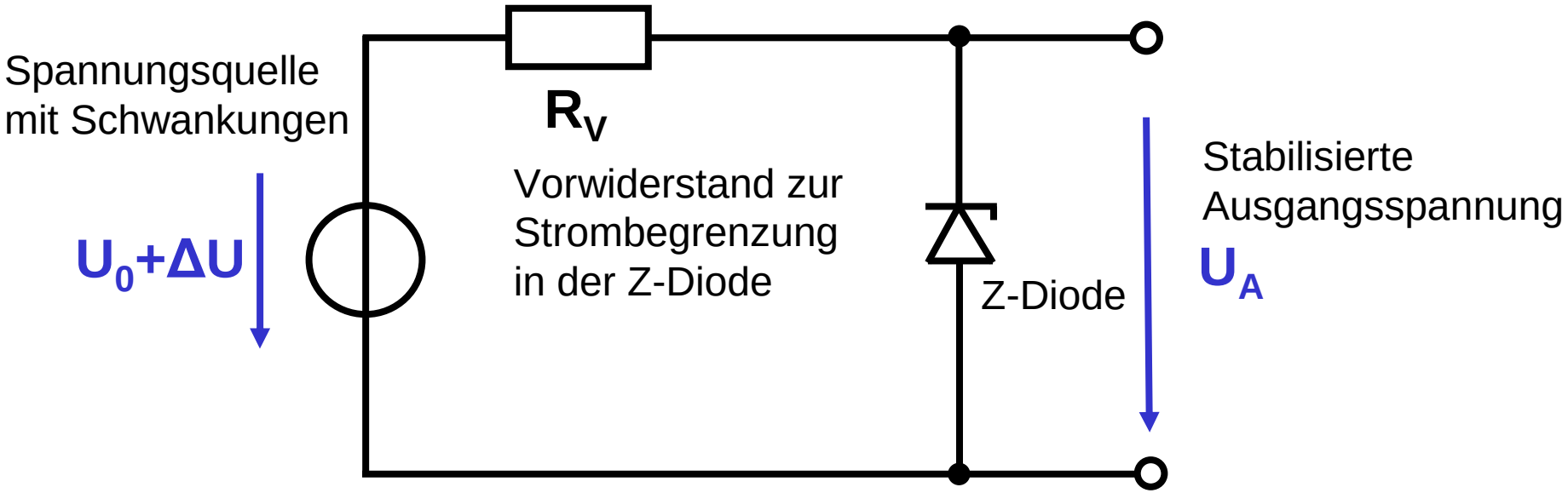


Betrieb in Rückwärtsrichtung!

180° gedreht



Schaltung zur Spannungsstabilisierung



Versorgungsspannung:

$U_0 + \Delta U = 30V$ +- 20%

Stabilisierung:

$U_{Z0} = 10V$
$r_Z = 50\Omega$
$R_V = 600\Omega$

Last:

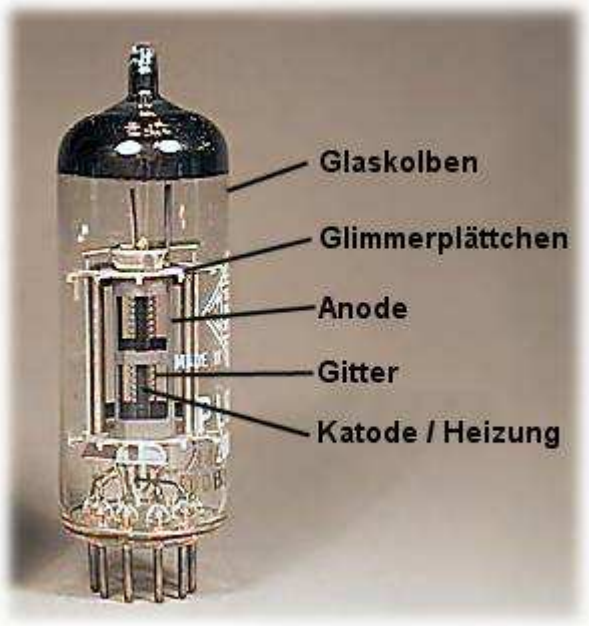
$R_L = 600\Omega$

$U_{L,N} = ?$ $\Delta U_L = ?$

Von der Röhre zum Transistor

1904 entwickelte der englische Physiker John Ambrose Fleming die

Elektronenröhre



1948 entwickelten J. Bardeen, W.H. Brattein und W. Shockley den 1.

Transistor

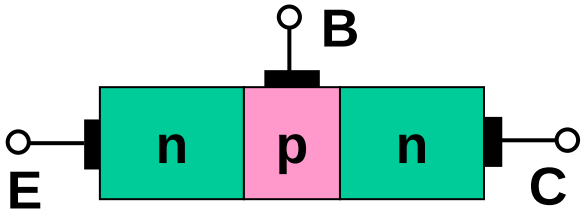
Produktion 2005-2008

Intel Pentium D

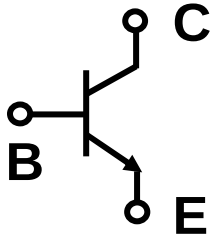
230 Mio Transistoren
15 x 15mm

Bipolartransistor

npn – Transistor

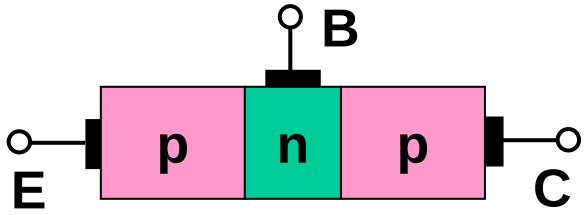


Schaltzeichen:

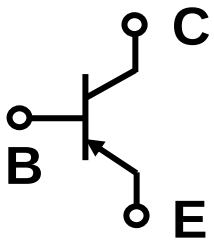


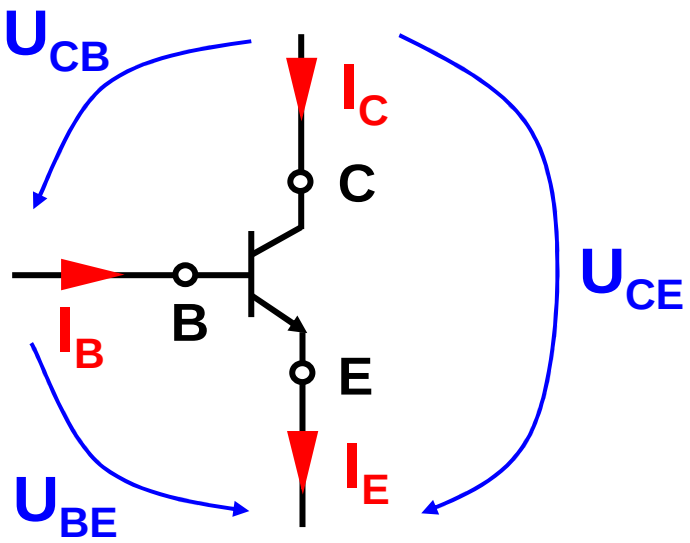
E ... Emitter
B ... Basis
C ... Kollektor

pnp – Transistor



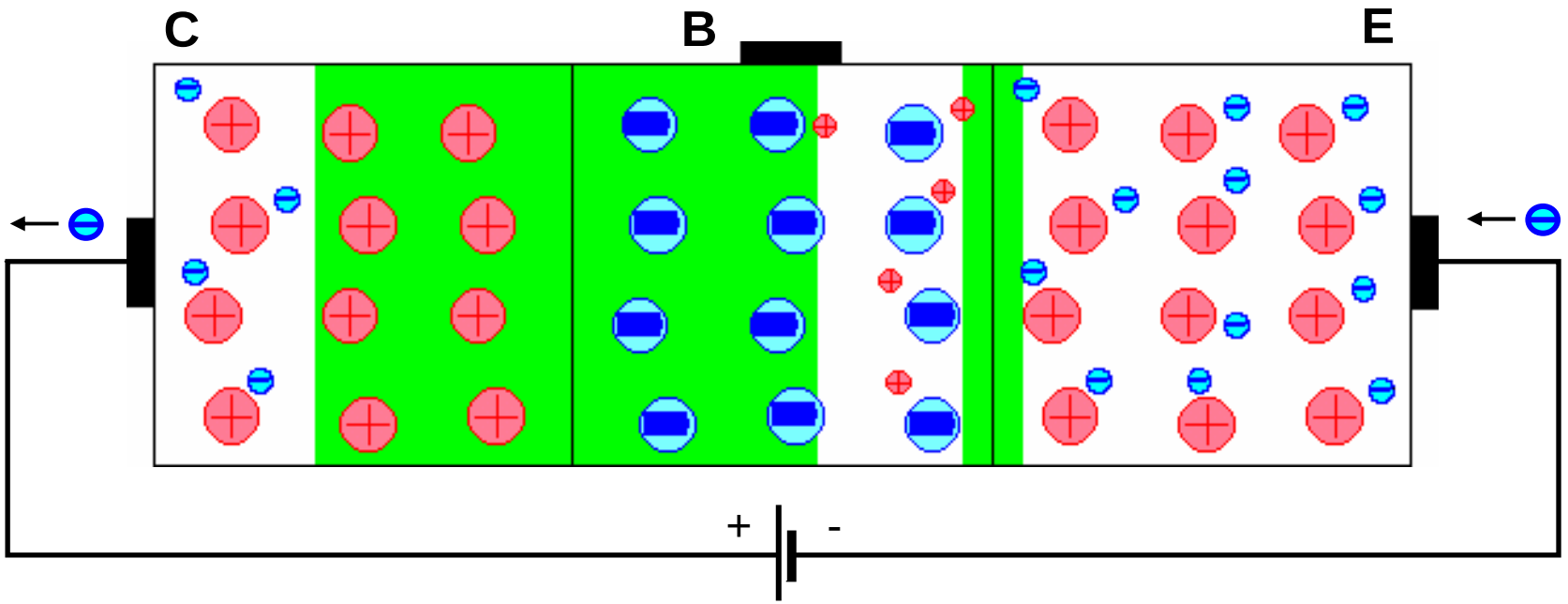
Schaltzeichen:





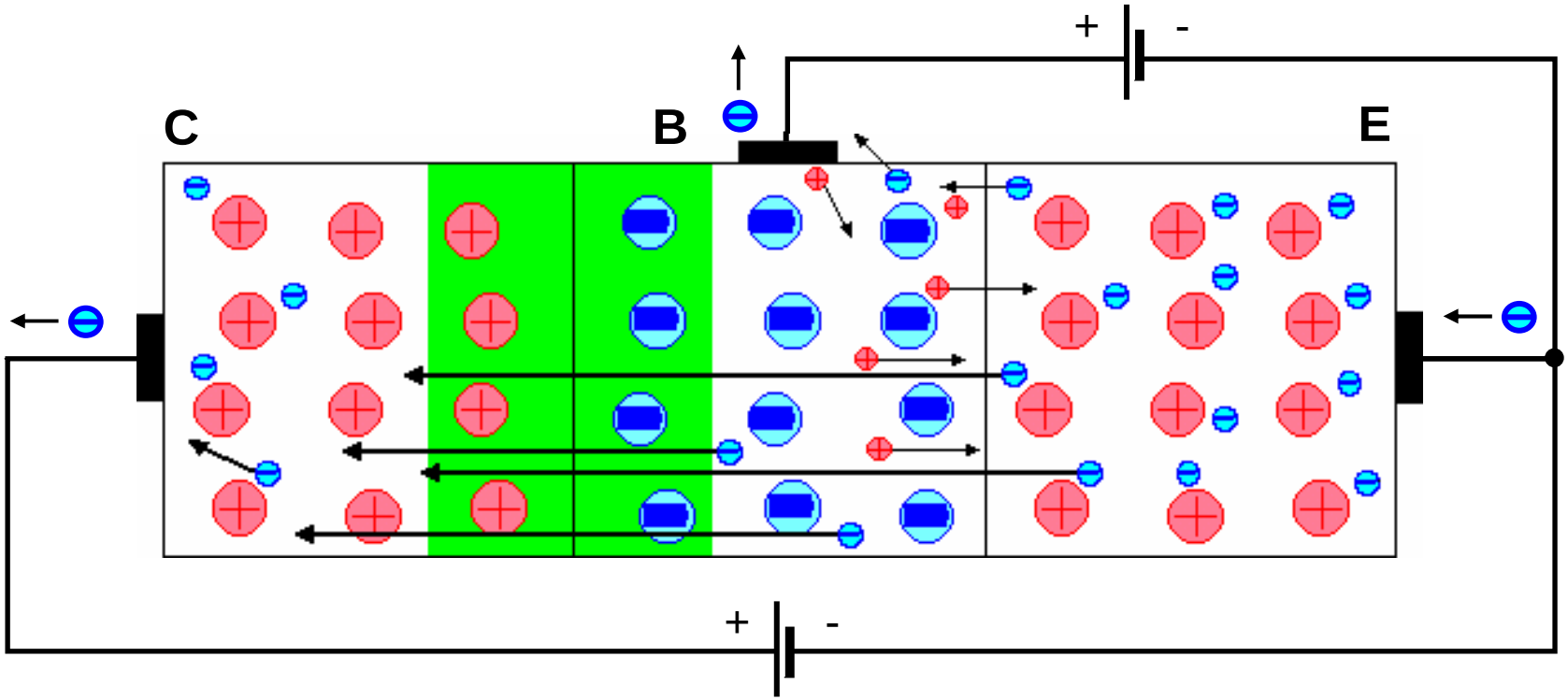
npn – Transistor $I_B = 0, U_{CE} > 0$

Der Bipolartransistor besteht aus zwei entgegengesetzten pn-Übergängen. Bei Anlegen einer Kollektor-Emitter Spannung wird eine Sperrschicht vergrößert, die andere verkleinert. Es fließt lediglich ein sehr geringer Sperrstrom.



npn – Transistor $I_B > 0$

Der Basisstrom macht die Basis-Emitter-Diode leitend. Es gelangen Elektronen in die dünne Basisschicht, die aufgrund der hohen Kollektor-Emitter Spannung zum größten Teil zum Kollektor hin abfließen. → Stromverstärkung



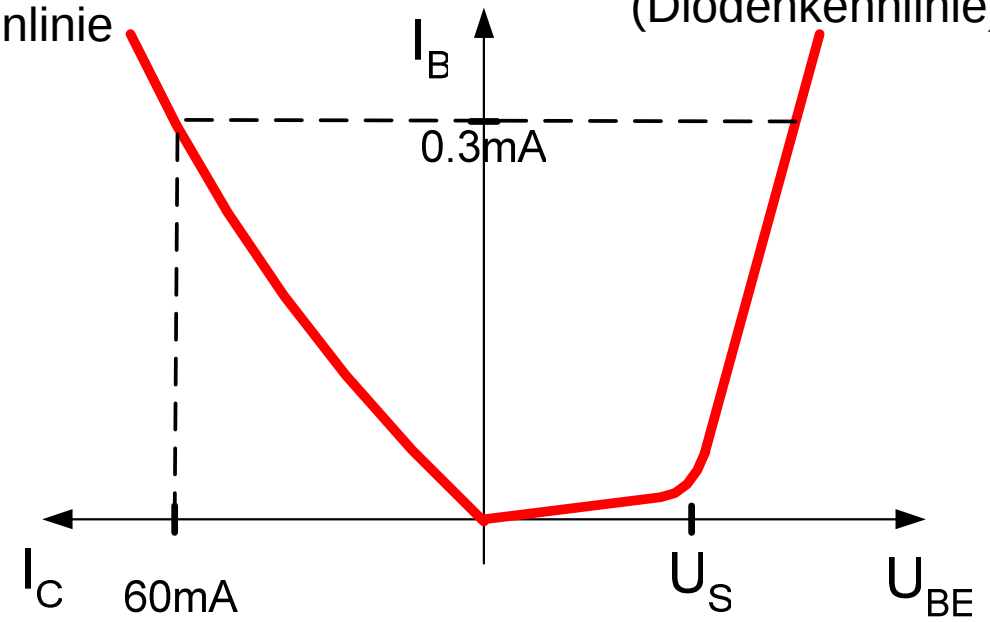
Transistorkennlinien

Der Effekt der Stromverstärkung ist nahezu linear:
$I_C = B \bullet I_B$; B … Stromverstärkung

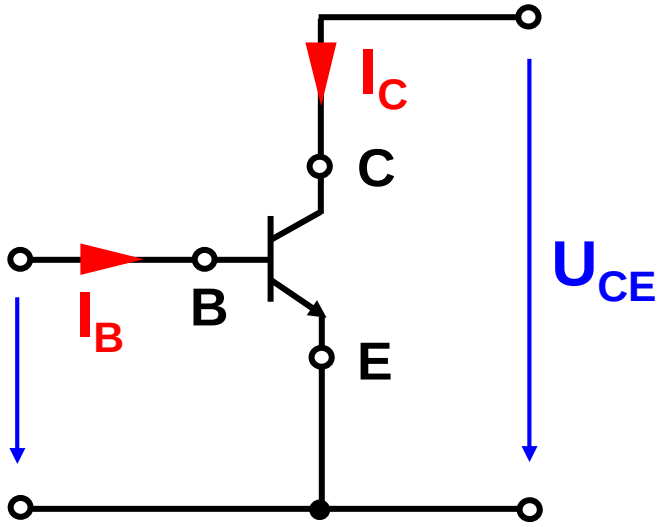
Differentieller Eingangswiderstand:

$$r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$$

Stromverstärkungs-kennlinie



Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$
(Diodenkennlinie)



Emitterschaltung

Transistorkennlinien

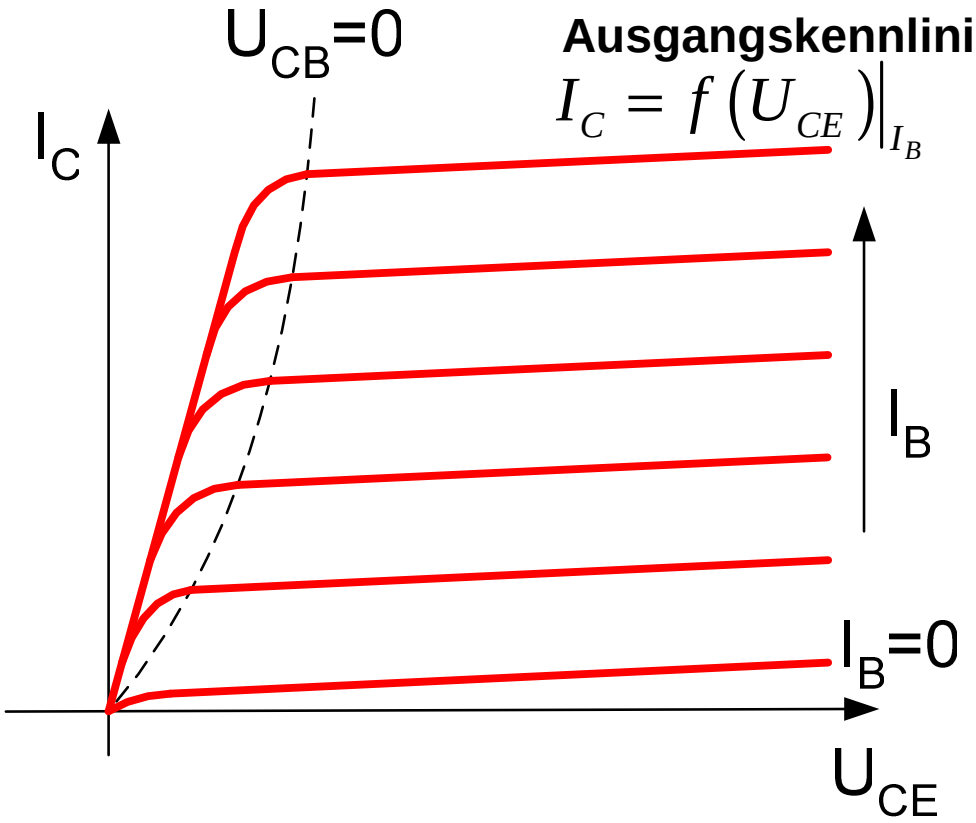
Der Effekt der Stromverstärkung ist nahezu linear:
$I_C = B \bullet I_B$; B … Stromverstärkung

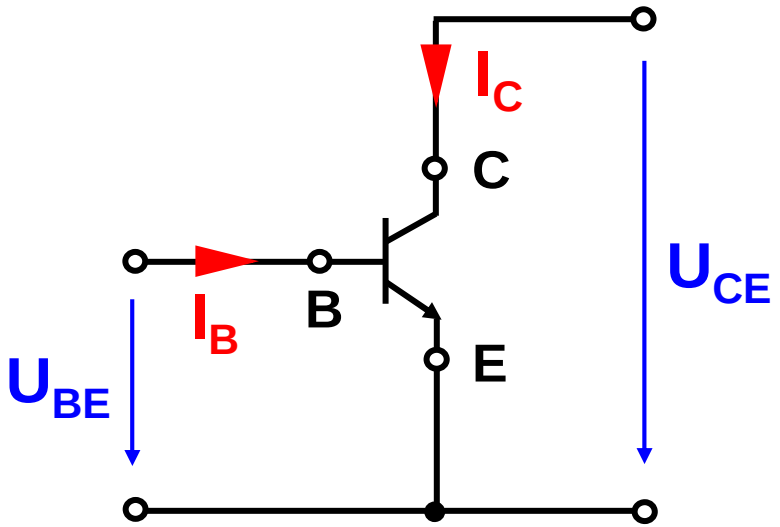
Differentieller Ausgangswiderstand:

$$r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$$

Ausgangskennlinien

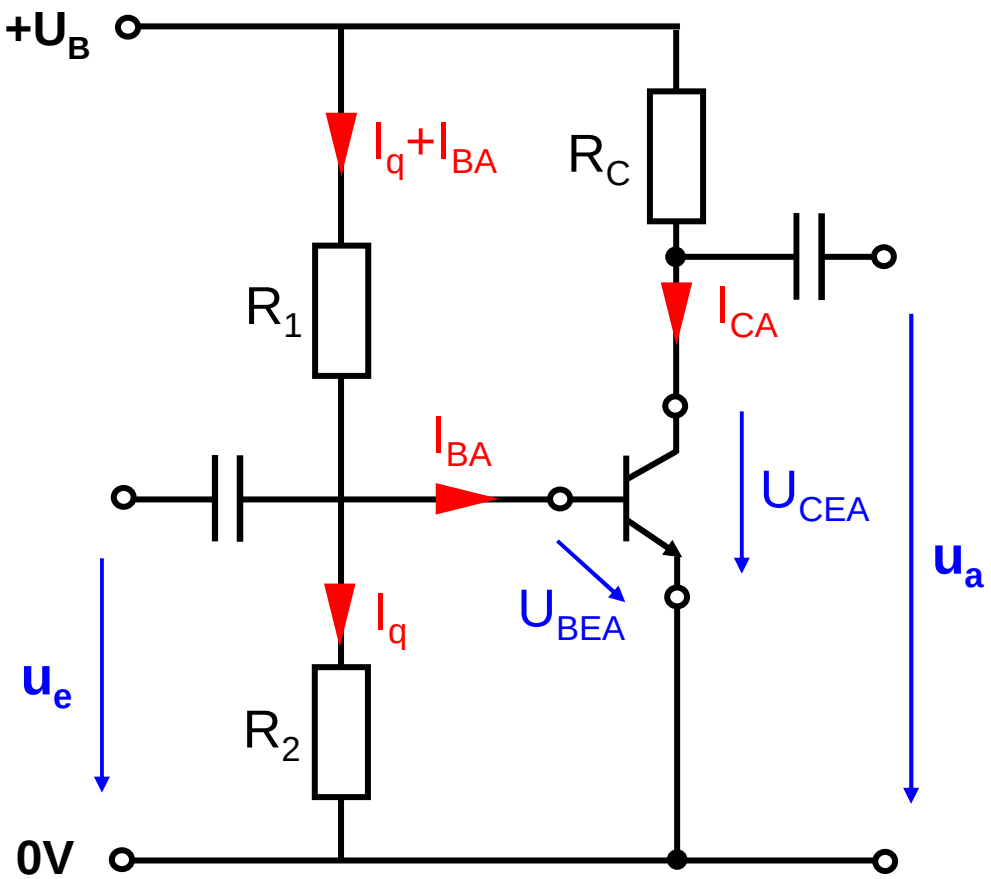
$$I_C = f(U_{CE})\big|_{I_B}$$



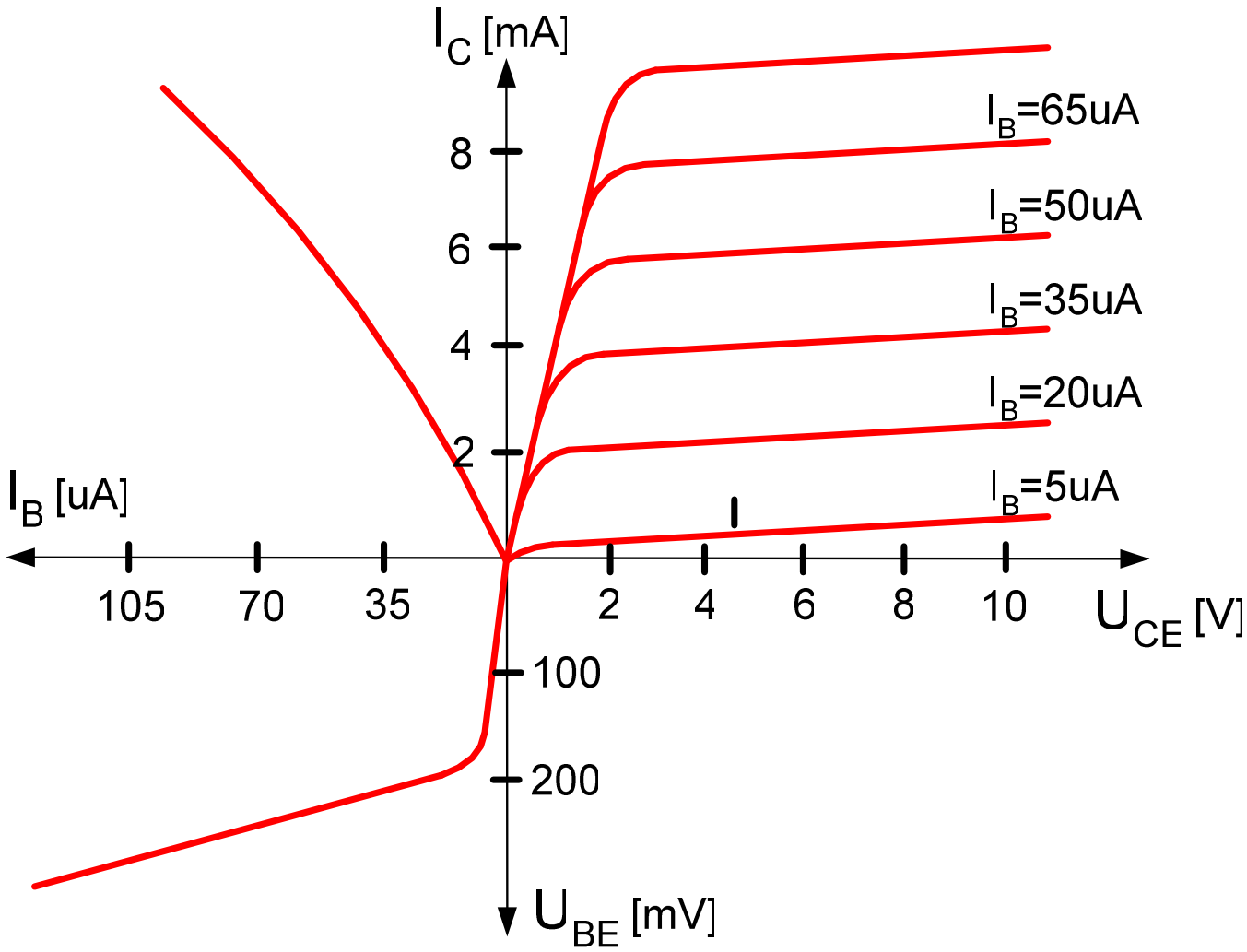


Emitterschaltung

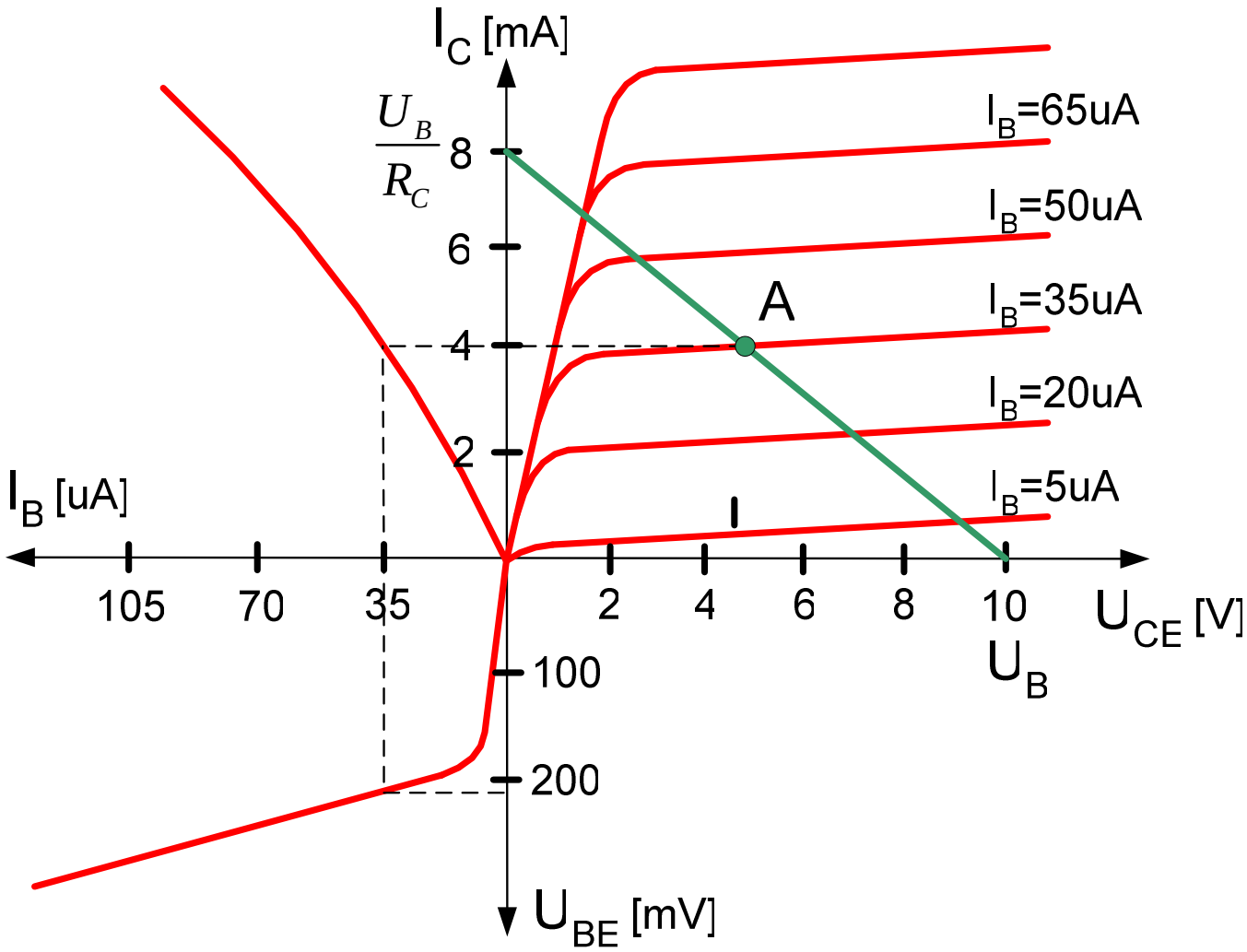
Transistorverstärker - Arbeitspunkt



Kennlinienfeld



Kennlinienfeld mit Arbeitspunkt

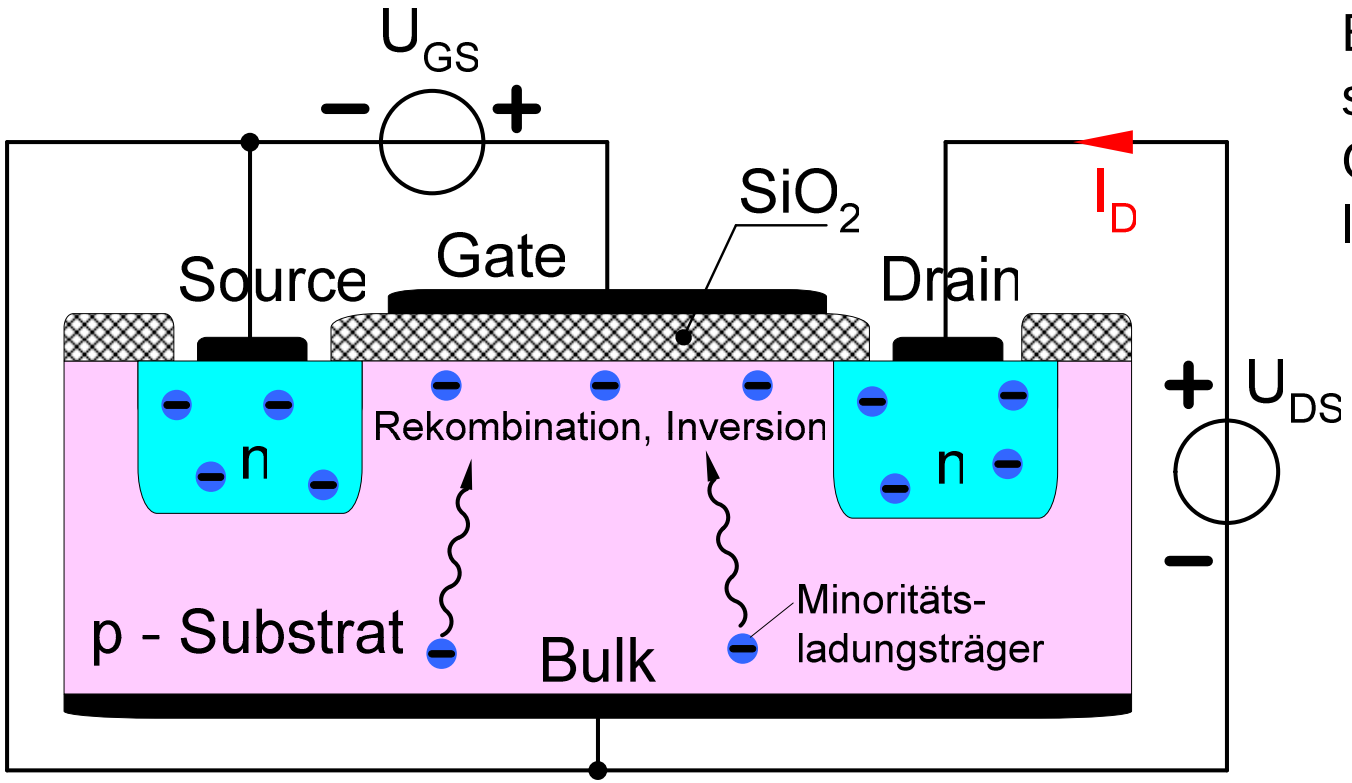


MOSFET

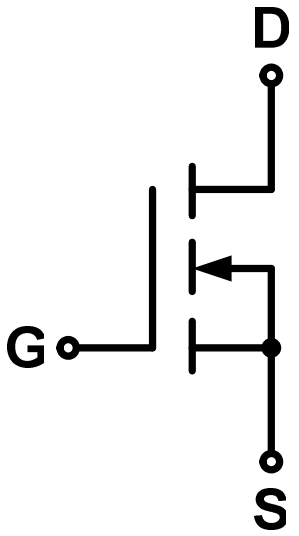
- Aufbau, Wirkungsweise
- Ausgangs-, Übertragungskennlinie
- FET als steuerbarer Widerstand
- Linearisierung des ohmschen Bereichs
- Schalterbetrieb
- Source-Schaltung

MOSFET, n-Kanal, selbstsperrend

Beim Feldeffekttransistor wird mit einer Gate-Source Steuerspannung die Leitfähigkeit der Drain-Source-Strecke beeinflußt, ohne daß ein Steuerstrom fließt, d.h. die Steuerung erfolgt leistungslos.

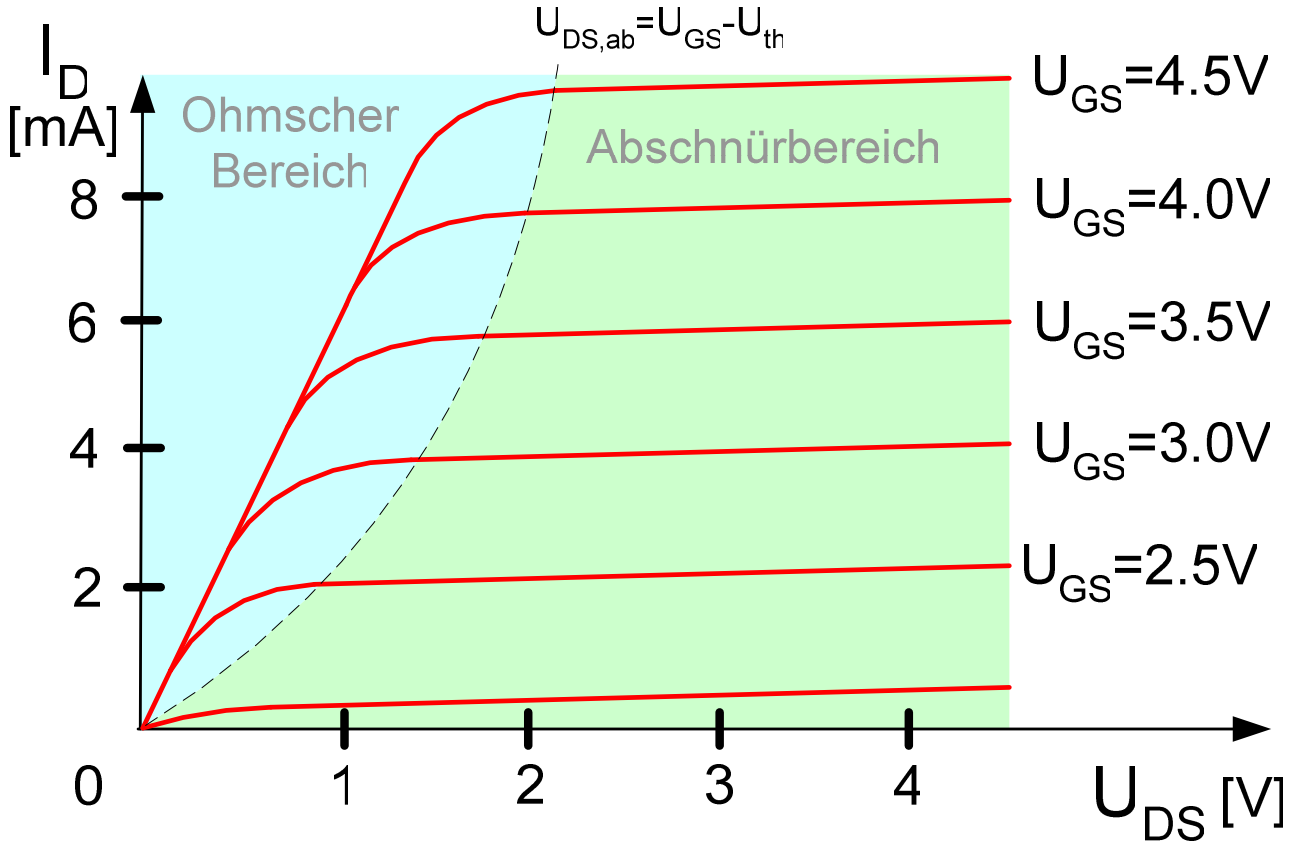


Bei $U_{GS}>U_{th}$ bildet sich unter dem Gatekontakt ein n-leitender Kanal aus!



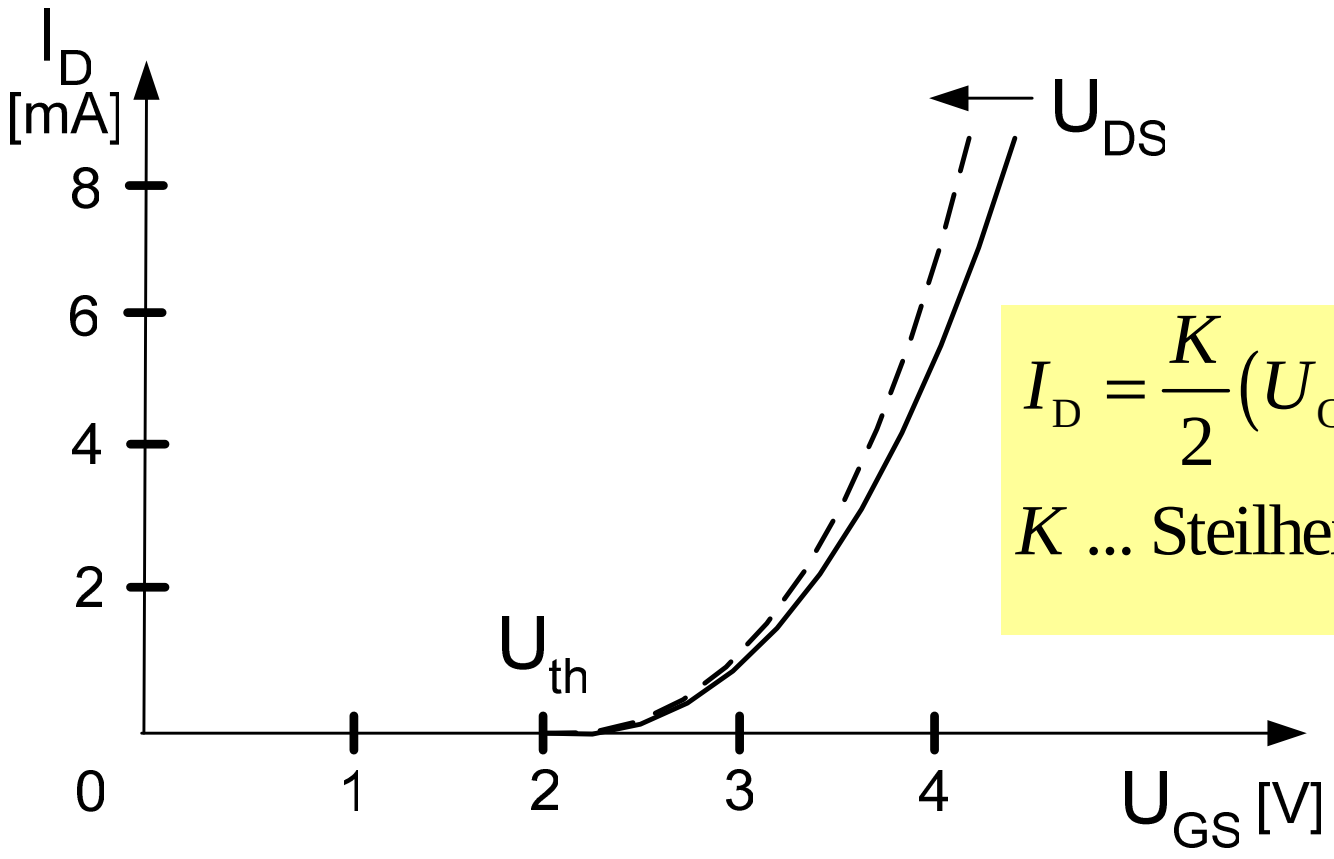
MOSFET- Ausgangskennlinienfeld

Die Ausgangskennlinien zeigen I_D in Abhängigkeit von U_{DS} für verschiedene (jeweils konstante U_{GS}).



MOSFET- Übertragungskennlinienfeld

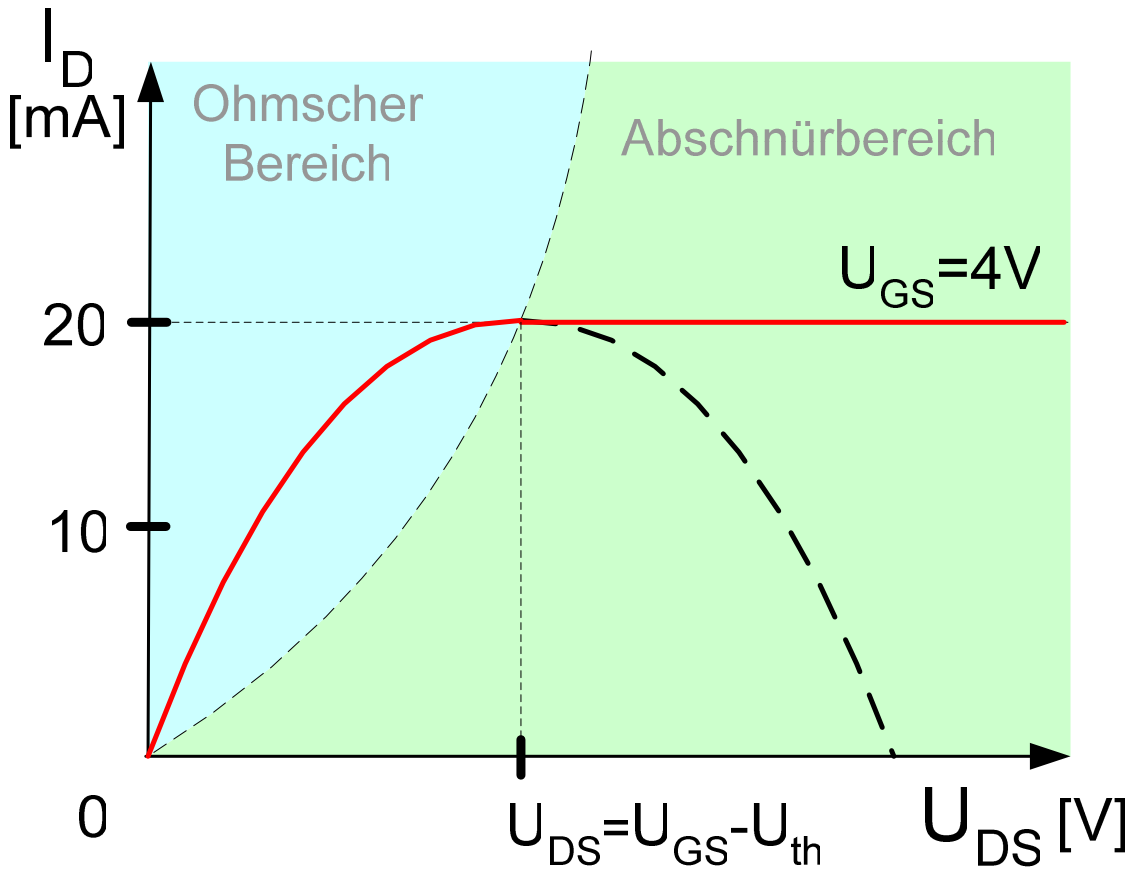
Im Abschnürbereich ist I_D im wesentlichen nur von U_{GS} abhängig.



$$I_D = \frac{K}{2}\left(U_{GS} - U_{th}\right)^2$$

K ... Steilheitskoeffizient $\left[\frac{A}{V^2}\right]$

Ausgangskennlinie – eine Näherung



Ohmscher Bereich:

$$I_D = K \cdot U_{DS}\left(U_{GS} - U_{th} - \frac{U_{DS}}{2}\right)$$

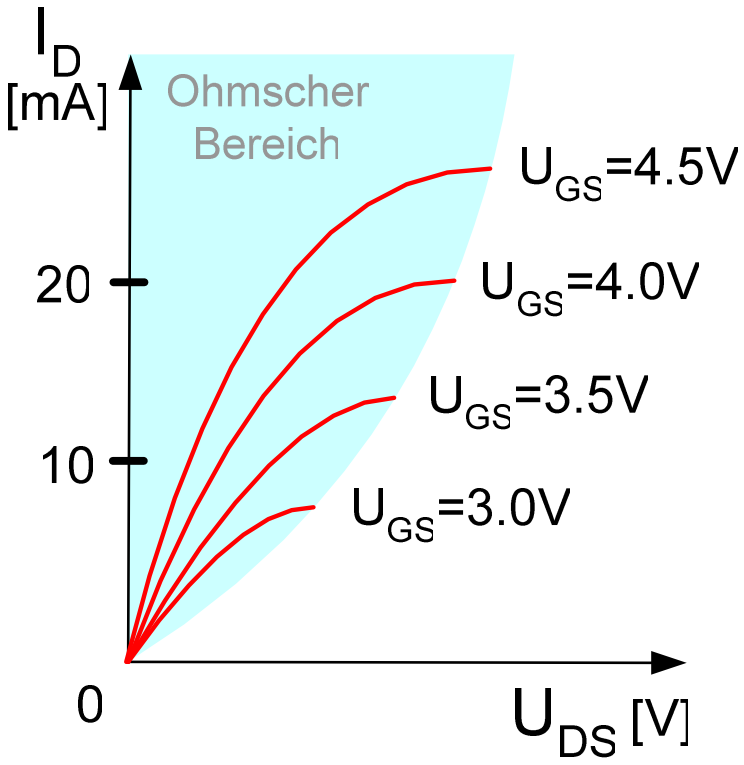
Abschnürbereich:

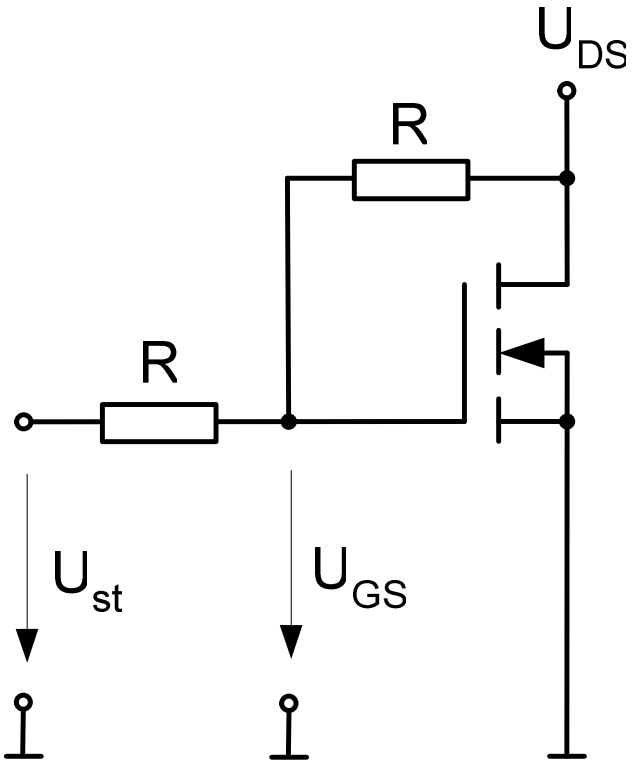
$$I_D = \text{const}$$

FET als steuerbarer Widerstand

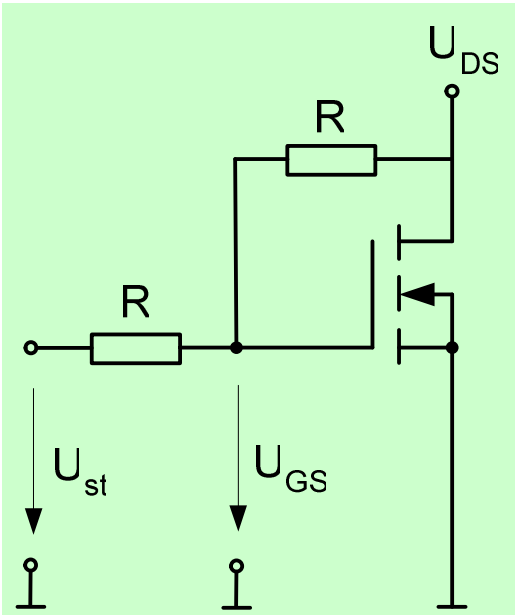
$$R = \frac{\partial U_{DS}}{\partial I_D} \neq \text{const}$$

Linearisierung

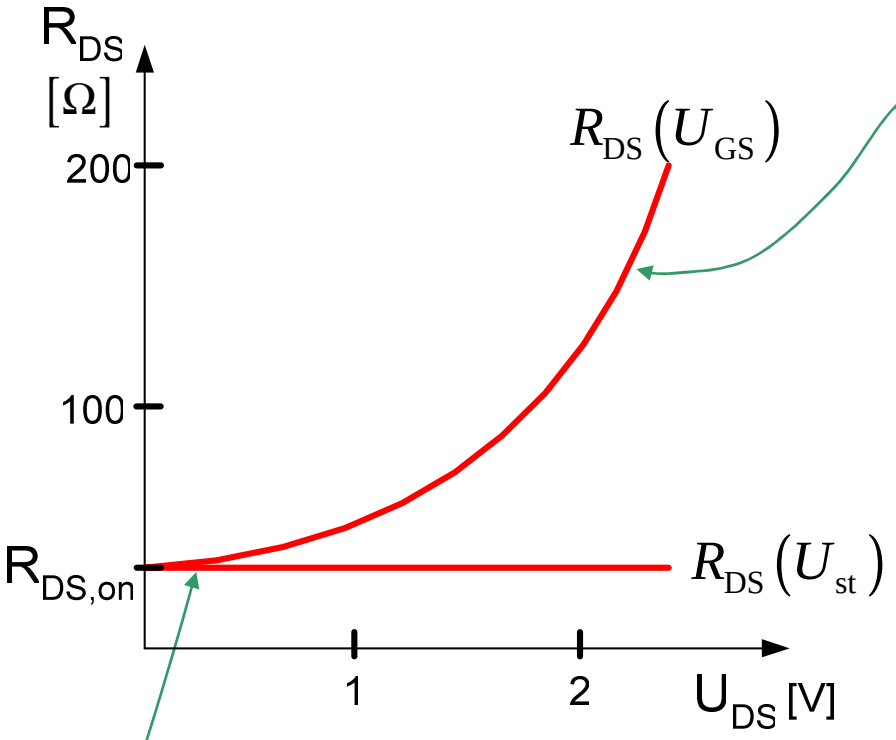


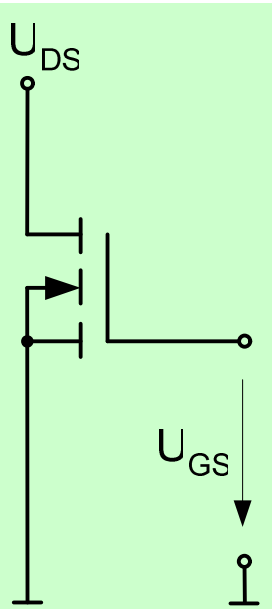


FET als steuerbarer Widerstand



$$R_{DS} = \frac{1}{K\left(\frac{U_{st}}{2} - U_{th}\right)}$$

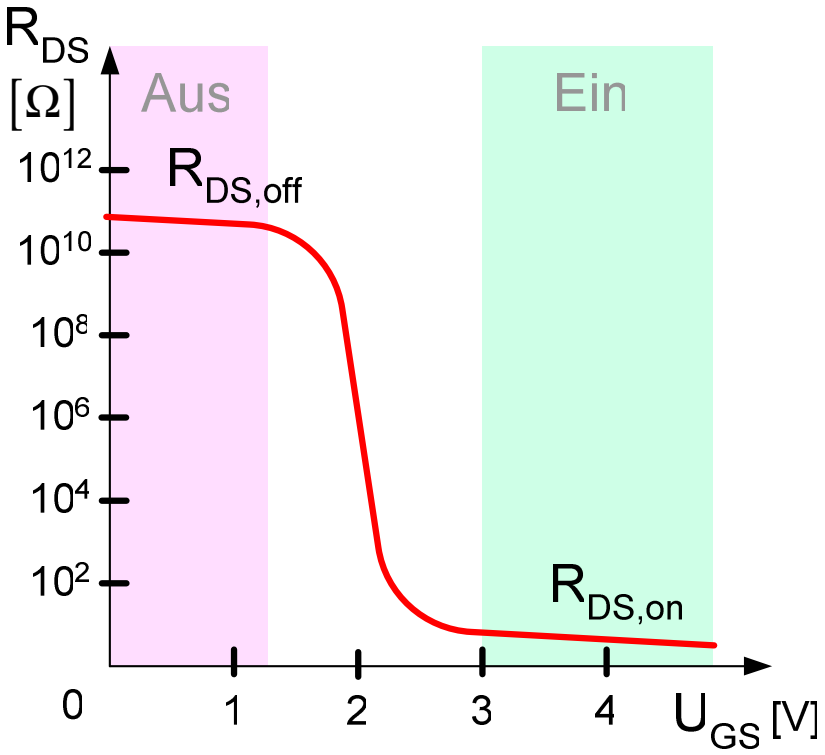




$$R_{DS} = \frac{1}{K\left(U_{GS} - U_{th} - U_{DS}\right)}$$

Schalterbetrieb

Im Schalterbetrieb ist der Einschaltwiderstand $R_{DS,on}$ von Interesse. Er sollte möglichst klein sein, damit wenig Verluste im Schalter (FET) entstehen.



$$R_{DS,on} = \left.\frac{\partial U_{DS}}{\partial I_D}\right|_{U_{DS}=0} = \frac{1}{K\left(U_{GS} - U_{th}\right)}$$

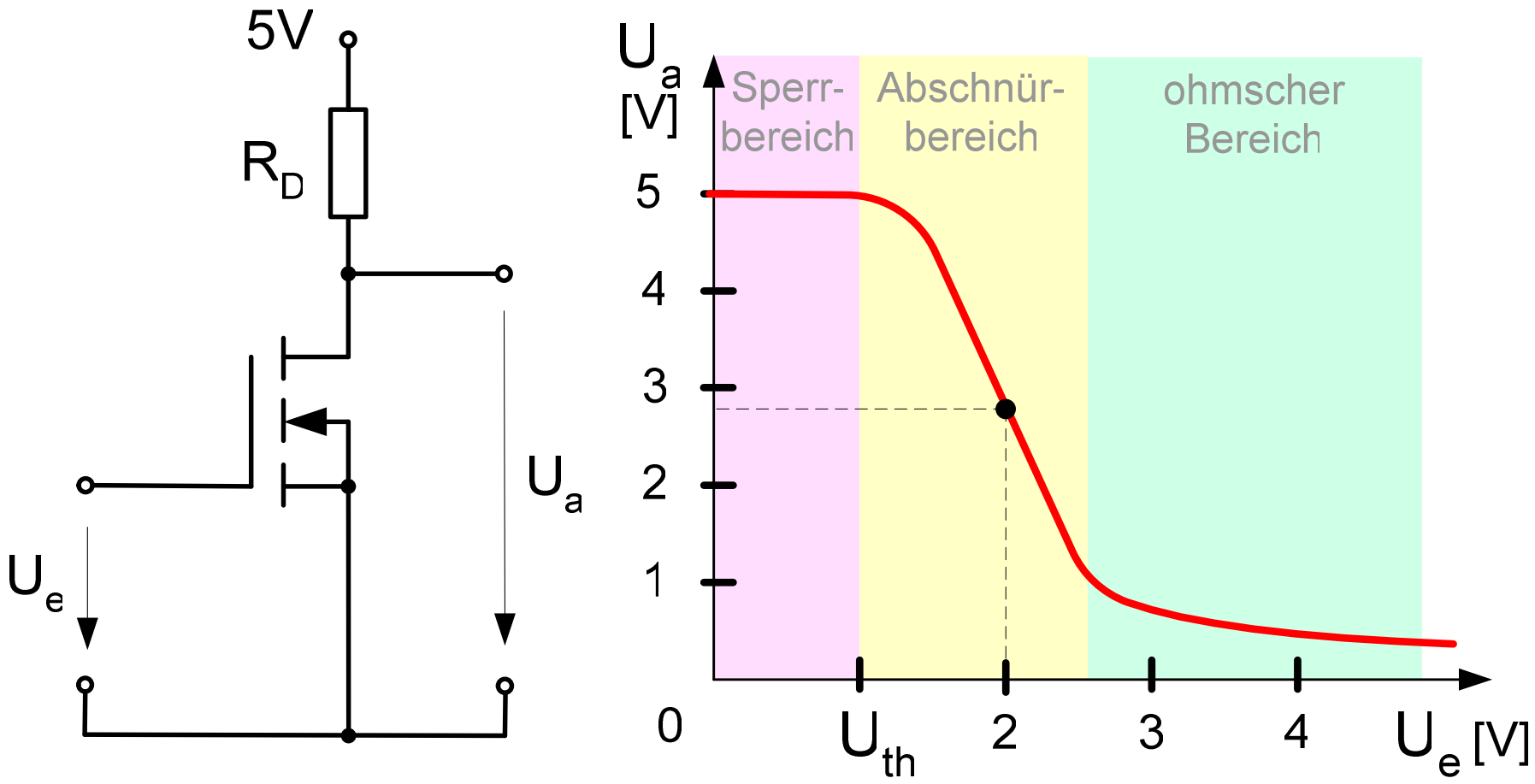
$U_{GS} = 5V$

$U_{th} = 2V$

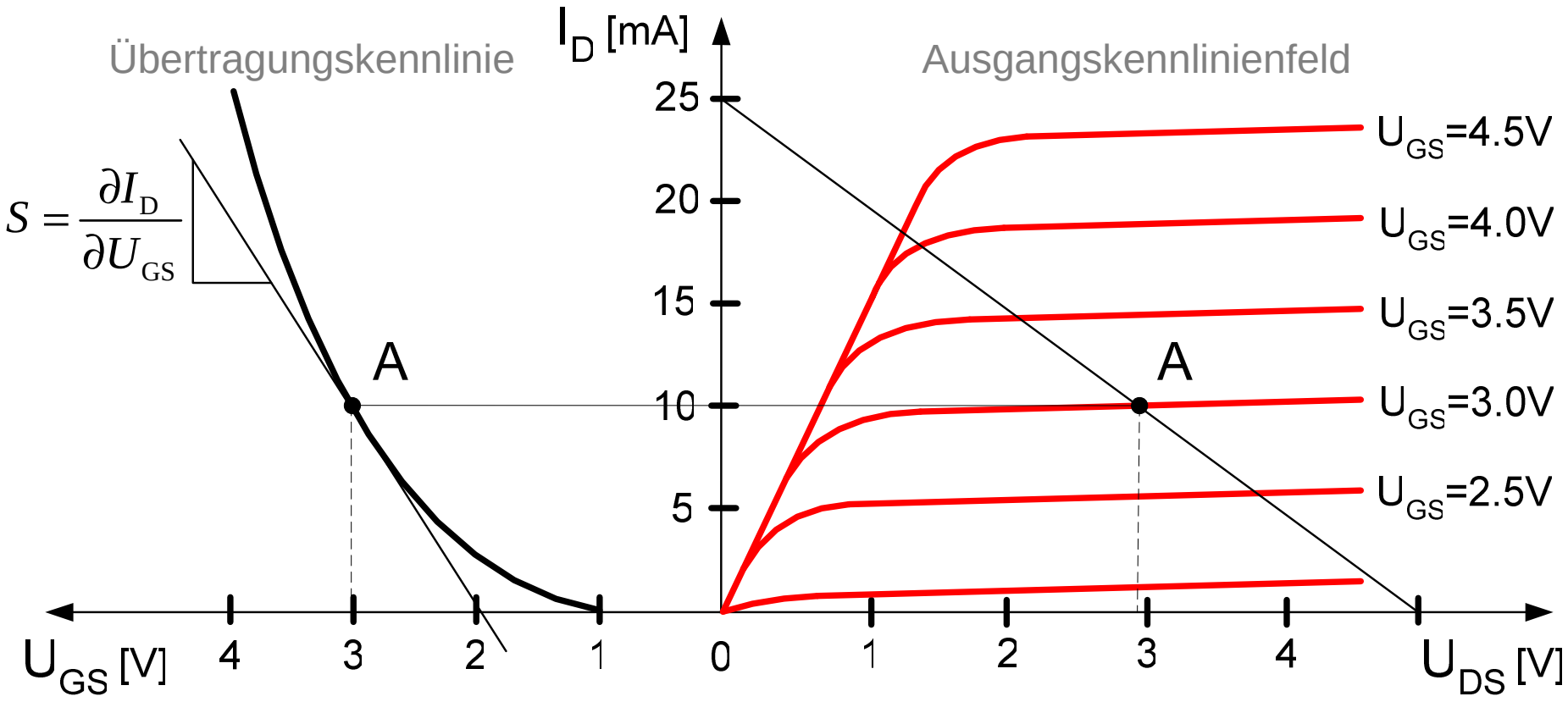
$K = 0.01\frac{A}{V^2}$

$$R_{DS,on} = 33\Omega$$

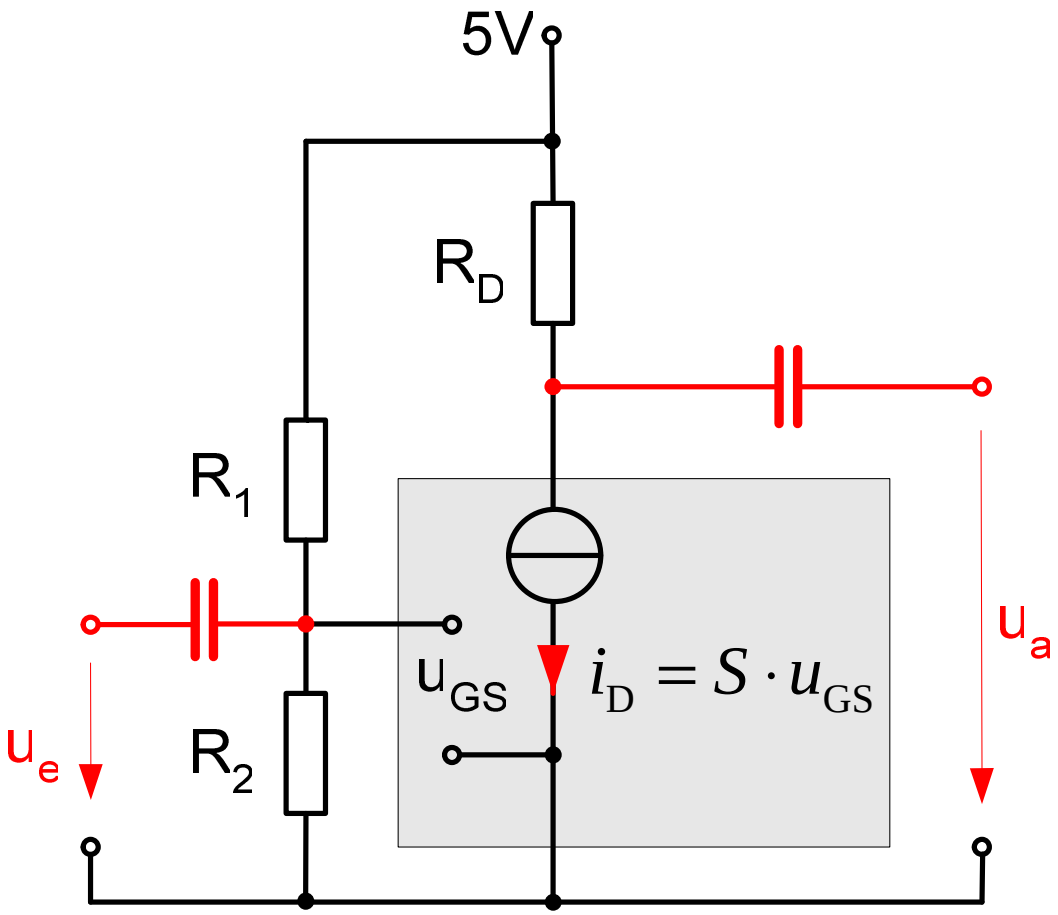
Sourceschaltung - Spannungsverstärkung



Arbeitspunkteinstellung



Kleinsignalverstärker



Arbeitspunktgrößen:

$$R_D = \frac{U_B = 5V}{I_{D,A} = 25mA} = 200\Omega$$

$$U_{GS,A} = 3V \quad \begin{cases} R_1 = 200k\Omega \\ R_2 = 300k\Omega \end{cases}$$

Kleinsignalparameter:

$$v = -S \cdot R_D = -0.02\frac{A}{V} \cdot 200\Omega$$

$$v = -4$$

Eingangswid.: $r_e \sim R_1 \| R_2$

Ausgangswid.: $r_a \sim R_D$

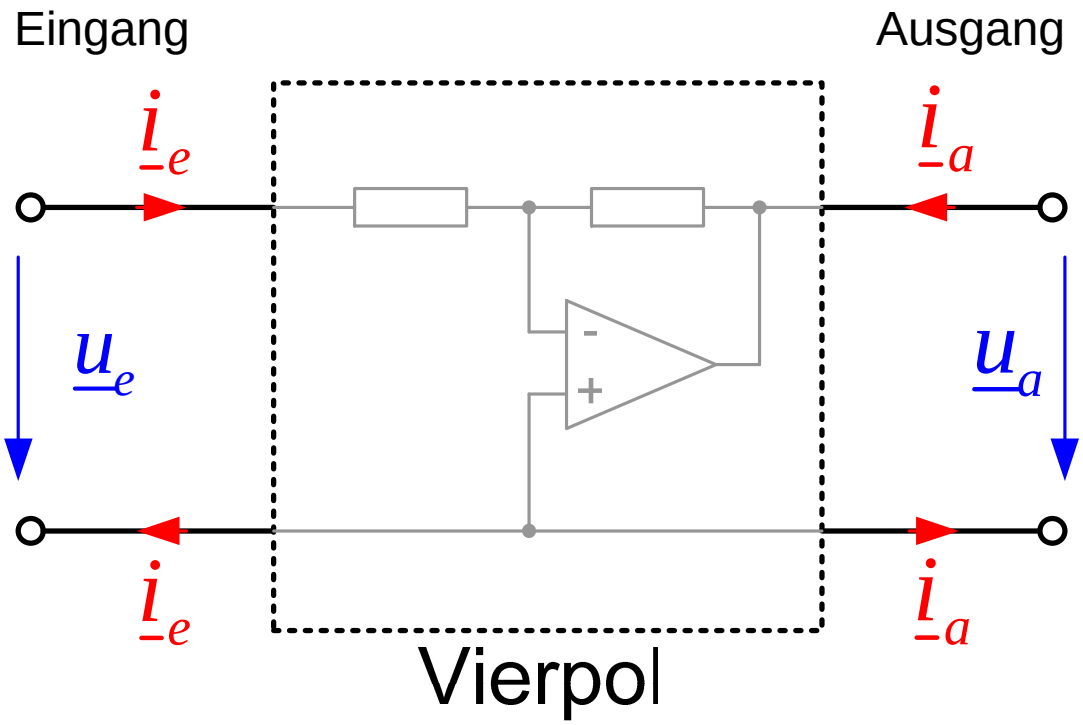
Inhalt

- Vierpole
  Bsp: Transformator, Transistor

- Operationsverstärker
  Rückkopplungen, Bsp: Hochpassfilter

Vierpol

Vierpole sind Netzwerke mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen. Lineare Vierpole lassen sich durch Vierpolgleichungen und –parameter gemäß der Vierpoltheorie beschreiben.



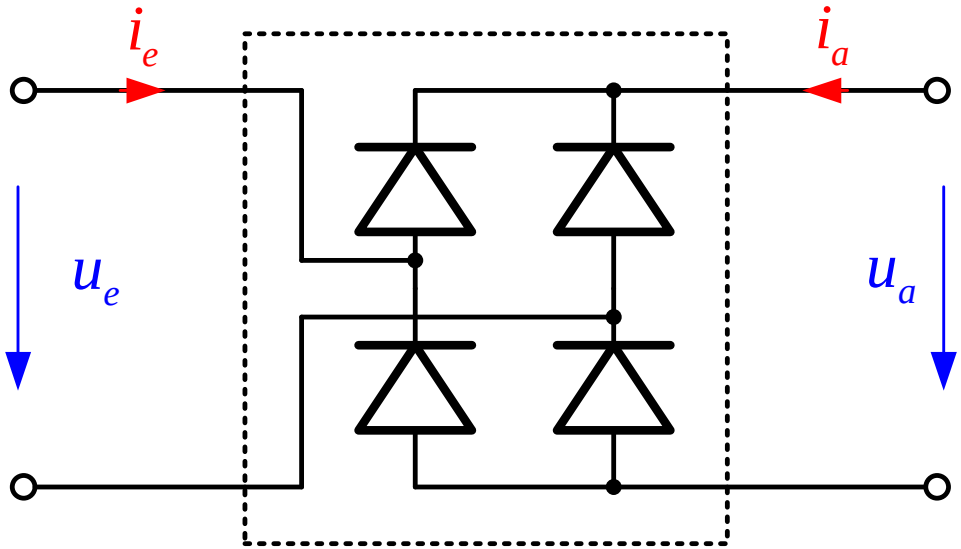
Charakterisierung nach:

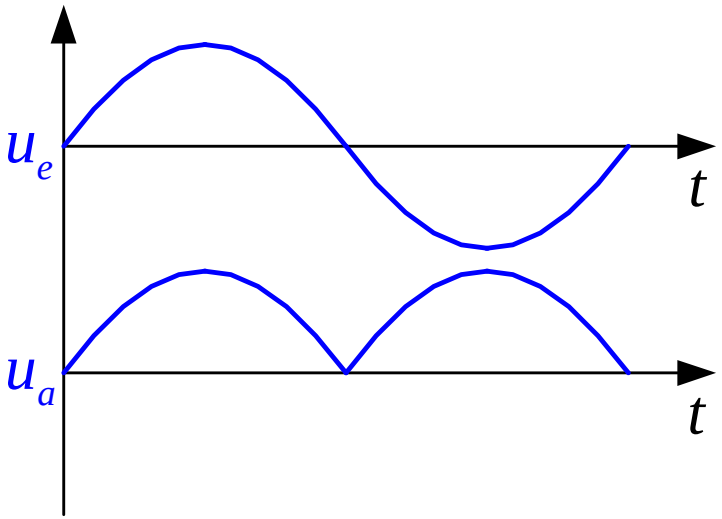
- **Linearität**
- **passiv / aktiv**
- (Symmetrie)
- (Umkehrbarkeit)
- (Rückwirkung)

Nichtlinearer - Vierpol

Die Spannungsverstärkung ist in diesem Bsp. alternierend. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Strömen an Eingang und Ausgang ist somit nichtlinear.

$$u_a = \begin{cases} u_e & \text{für } u_e > 0 \\ -u_e & \text{für } u_e < 0 \end{cases}$$

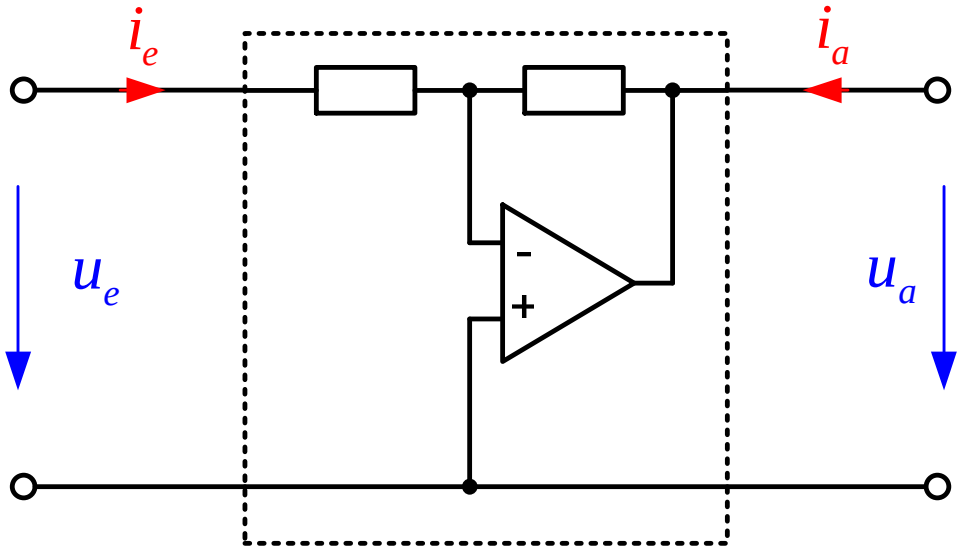


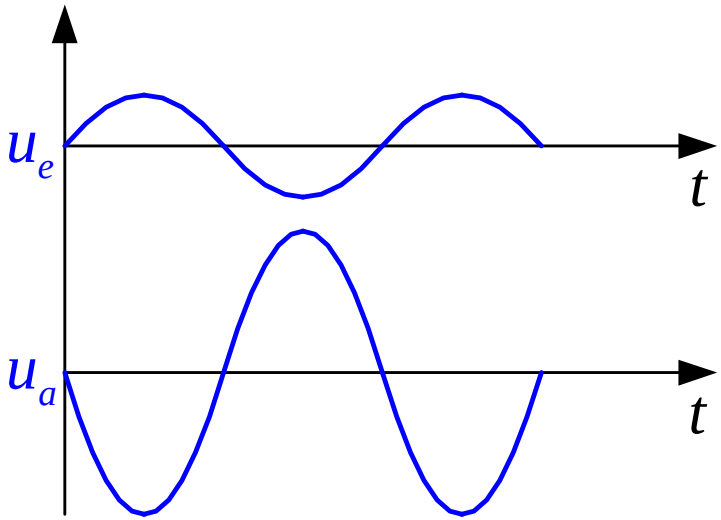


Linearer Vierpol

Die Spannung am Ausgang ist direkt proportional zur Spannung am Eingang. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen an Eingang und Ausgang ist somit linear.

$$u_a = -v \cdot u_e$$



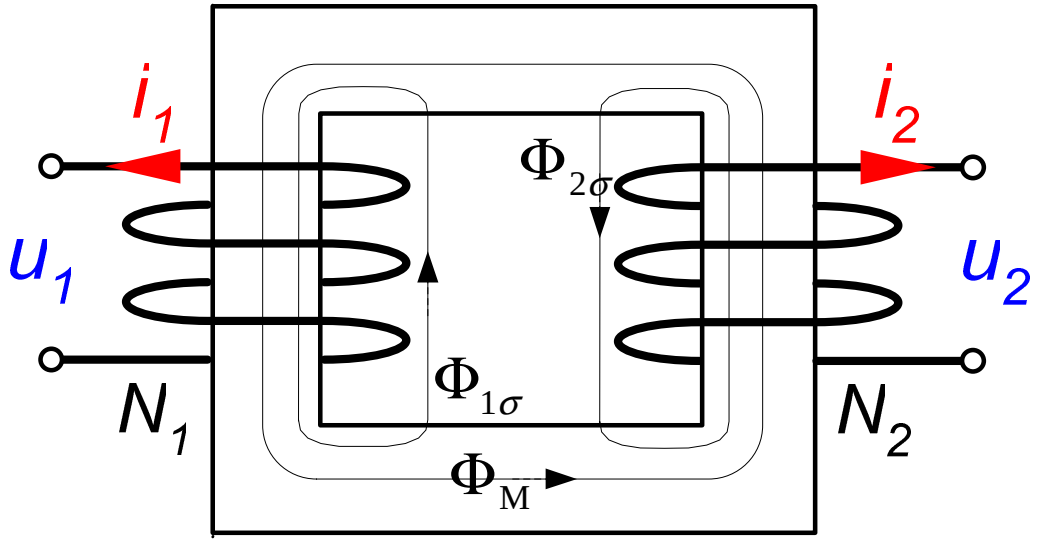


Vierpolmatrizen

Vierpolmatrizen dienen zur Beschreibung des Verhaltens von Vierpolen. Dabei werden jeweils zwei der Größen u_1, u_2, i_1, i_2 als unabhängig angenommen und die zwei anderen als Funktion dieser.

Z-Matrix (stromgesteuert)	**Y-Matrix** (spannungsgesteuert)
$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ Bsp: Transformator	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$
Hybrid 1-Matrix	**Hybrid 2**-Matrix
$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ Bsp: Bipolartransistor	$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Vierpolmatrix eines Transformators



Primärseite	Sekundärseite
R_1, L_1	**R_2, L_2**
Koppelinduktivität **M**	

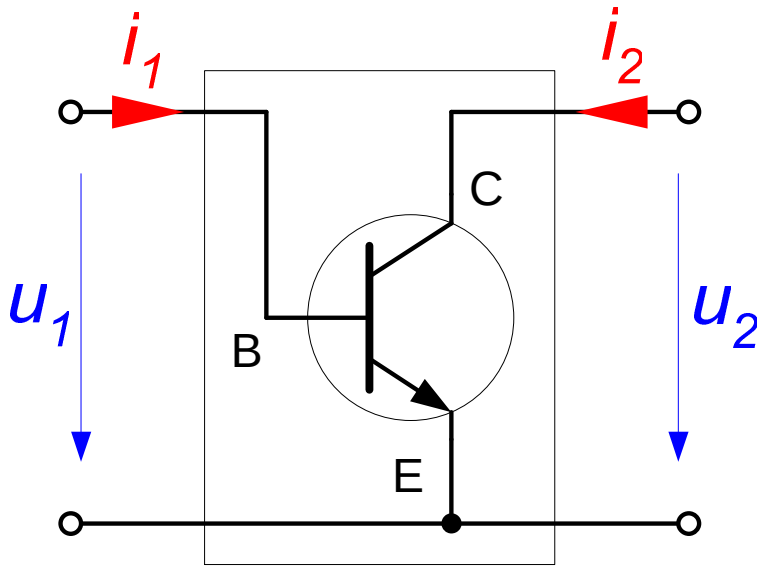
$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Vierpol Z-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 & \mathrm{j}\omega M \\ \mathrm{j}\omega M & R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix}$$

Transistor als Vierpol (h-Parameter)



Unabhängige Größen: $i_B,\ u_{CE}$

Abhängige Größen:

$$u_{BE} = U_{BE}\left(i_B, u_{CE}\right)$$

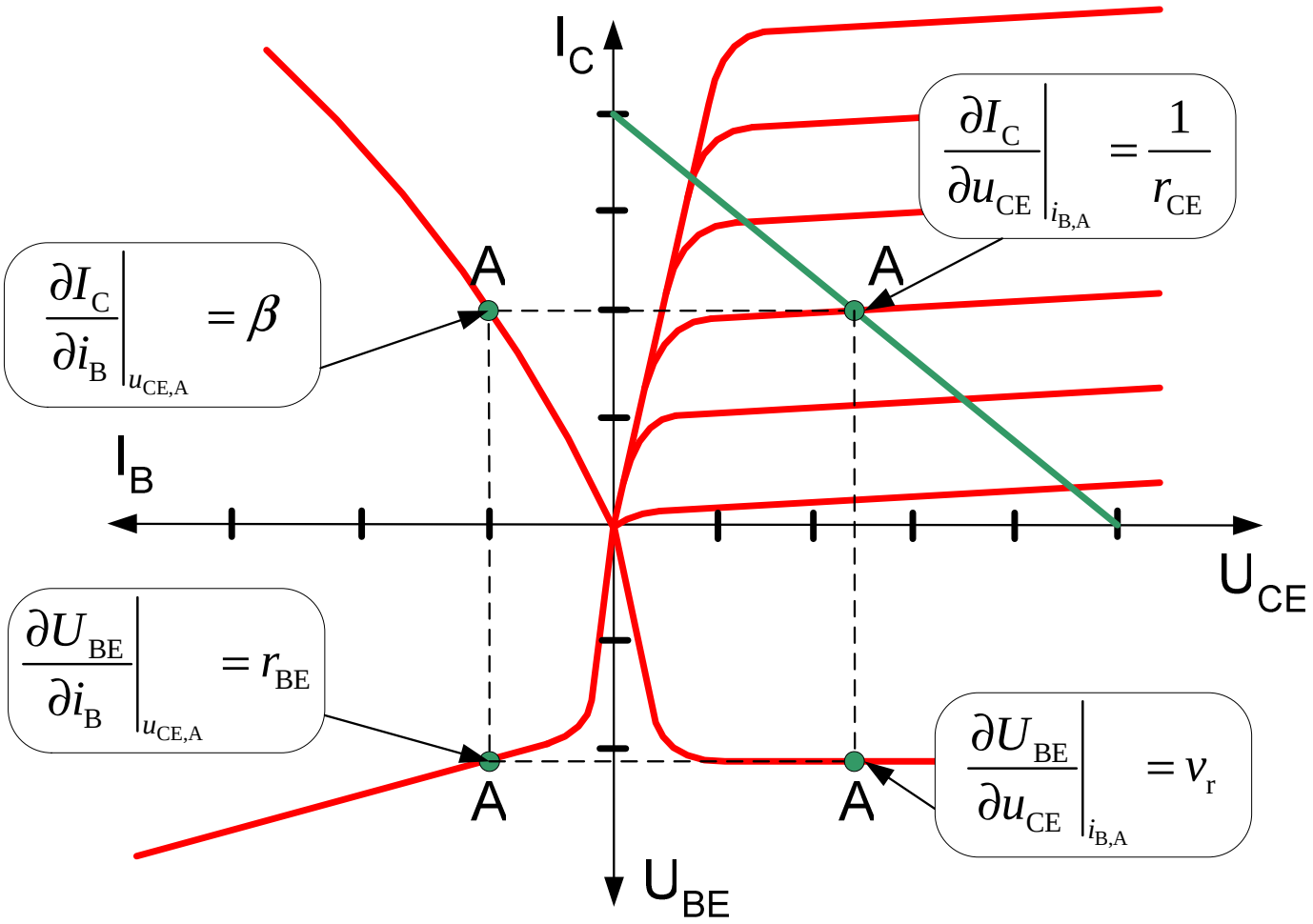
$$i_C = I_C\left(i_B, u_{CE}\right)$$

Vierpol H-Matrix:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{BE} \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_B \\ u_{CE} \end{bmatrix}$$

Linearisierung im Arbeitspunkt



$$H_{11} = r_{BE}$$

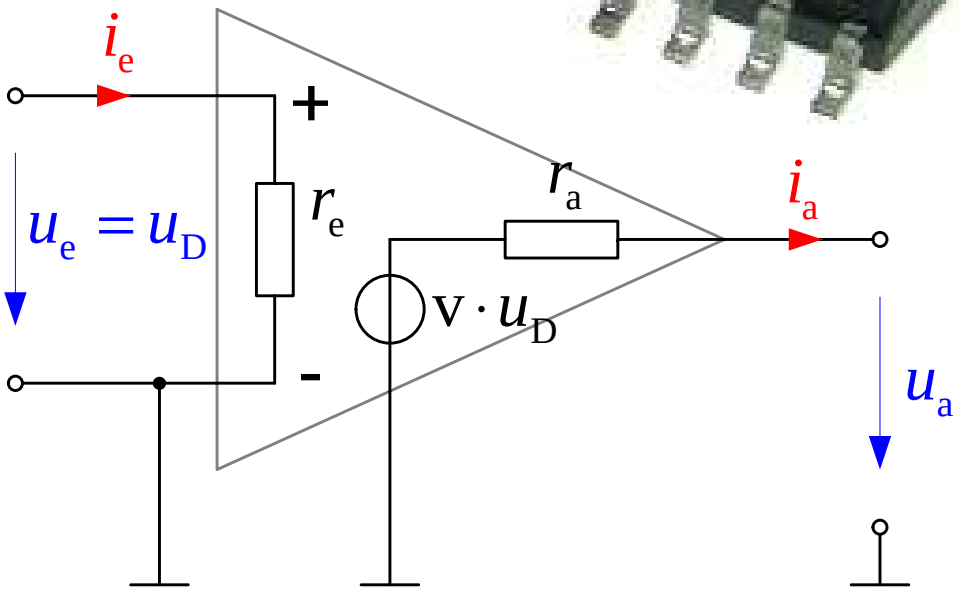
$$H_{12} = \nu_r$$

$$H_{21} = \beta$$

$$H_{22} = \frac{1}{r_{CE}}$$

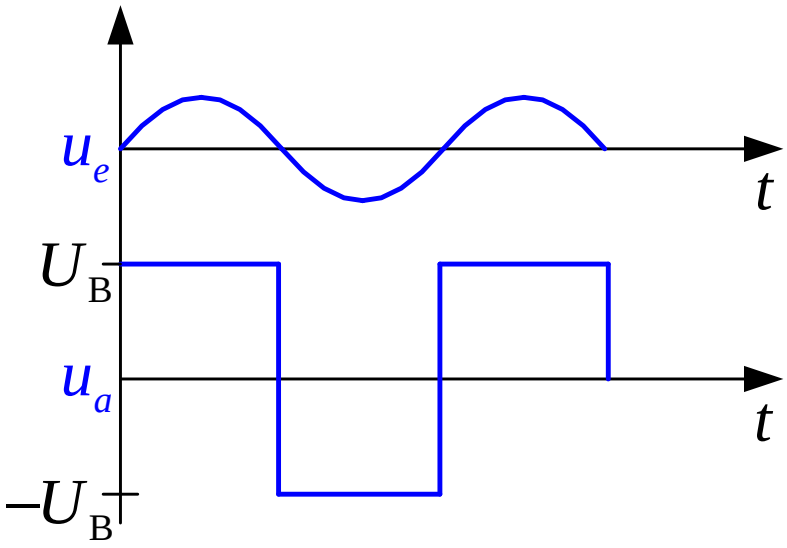
Operationsverstärker (OPV)

Ein OPV ist ein Gleichspannungsverstärker mit sehr hoher Verstärkung, der als integrierte Schaltung hergestellt wird.



Ohne Beschaltung:

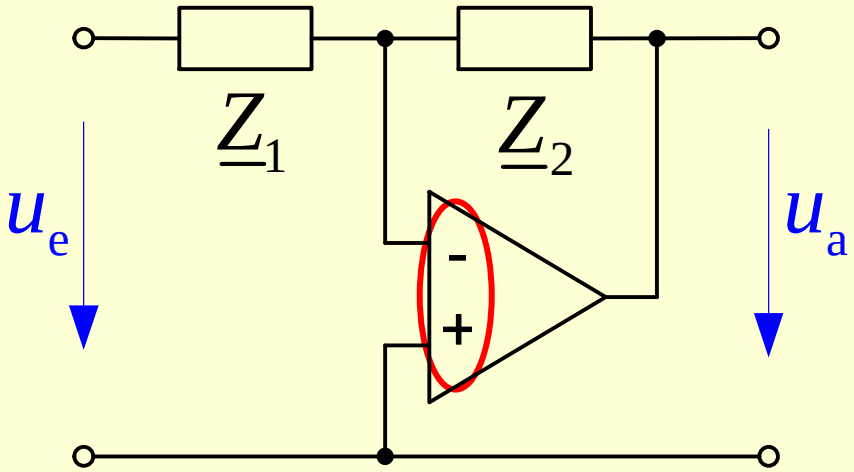
$$u_a = \begin{cases} U_B & \text{wenn } u_D > 0 \\ -U_B & \text{wenn } u_D < 0 \end{cases}$$



OPV - Rückkopplungen

Mit einer Rückkopplung am OPV kann gezielt ein bestimmtes Übertragungsverhalten eingestellt werden.

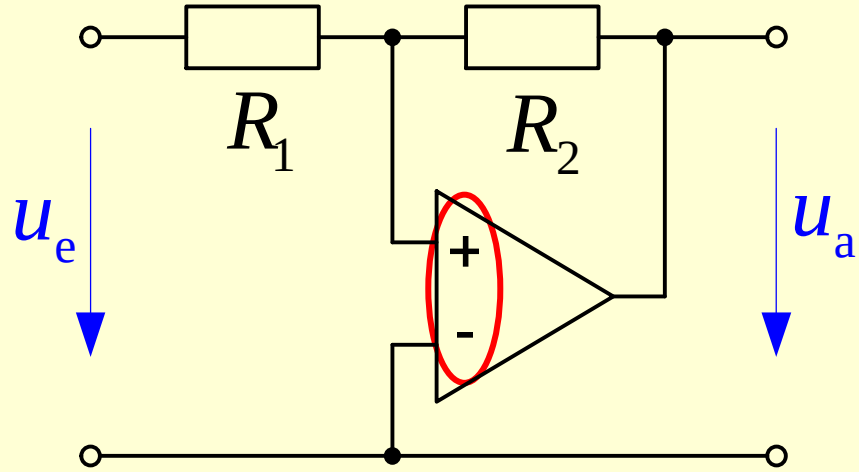
Gegenkopplung



$$u_a = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \cdot u_e$$

Verstärker, Filter

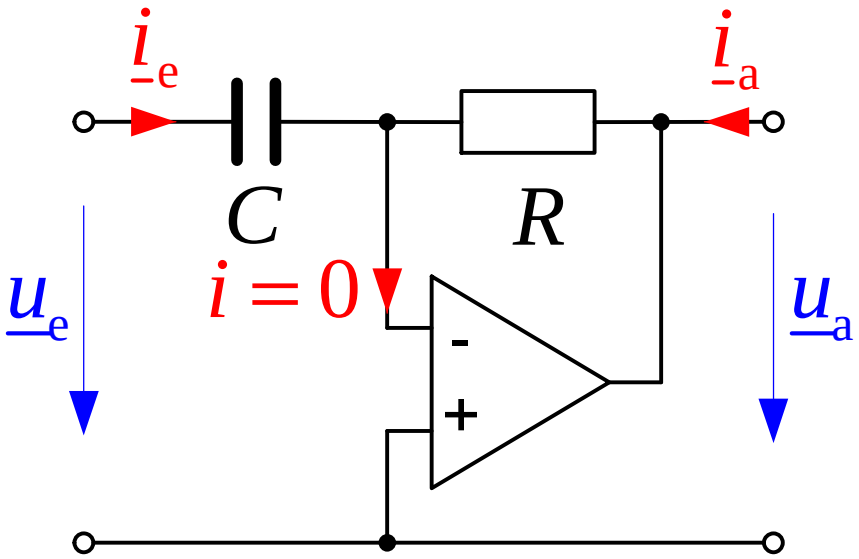
Mitkopplung



$$u_{e,kipp} = \frac{R_2}{R_1} \cdot U_B$$

Komparator mit Hysterese

OPV - Hochpass



$$\underbrace{\underline{i}_e = -\underline{i}_a}$$

$$\frac{\underline{u}_e}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{u}_a}{R}$$

Übertragungsfunktion: $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = -j\omega RC$$

Betragsgang: $$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \omega RC$$

Phasengang: $$\arg\left\{\underline{H}(j\omega)\right\} = -\frac{\pi}{2} = -90°$$

Signale & Systeme

- Signalklassen
- Signaleigenschaften
- Elementarsignale
- Systembegriff
- Systemeigenschaften
- Darstellung durch Faltung

Bsp – Digitale Signalverarbeitung

Gaspedal

Steuergerät

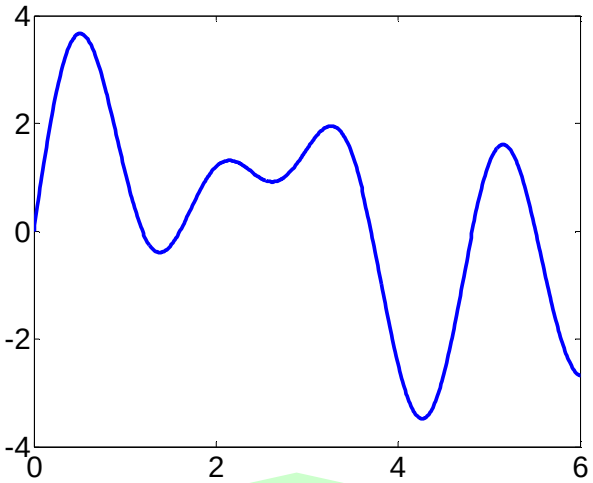
Einspritzanlage

Sensorausgang Abtasten AD-Wandeln Verarbeiten DA-Wandeln Halten

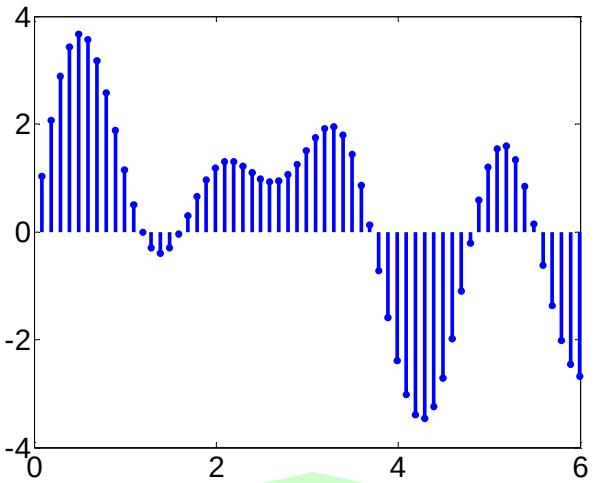
zeitkontinuierlich	Zeitdiskret	zeitkontinuierlich
wertkontinuierlich	wertdiskret	

Signalklassen

Signalklassen

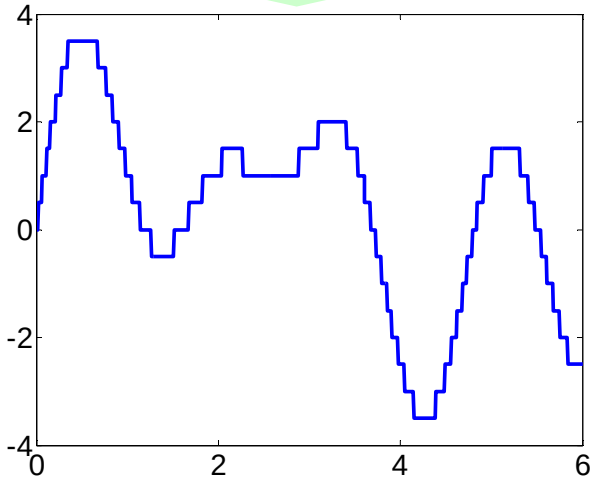


Wertkontinuierlich

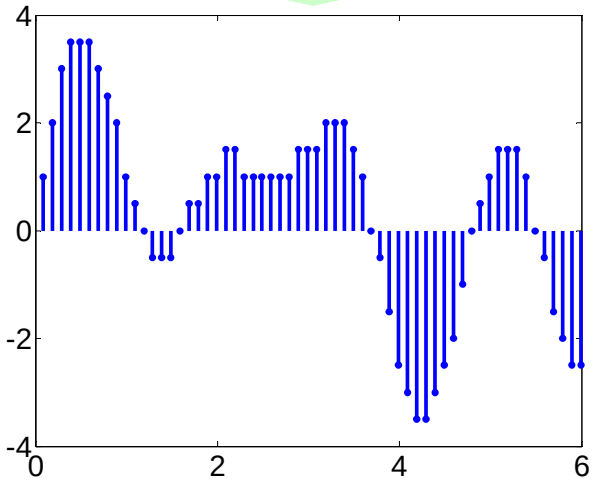


Zeitkontinuierlich

Zeitdiskret



Wertdiskret

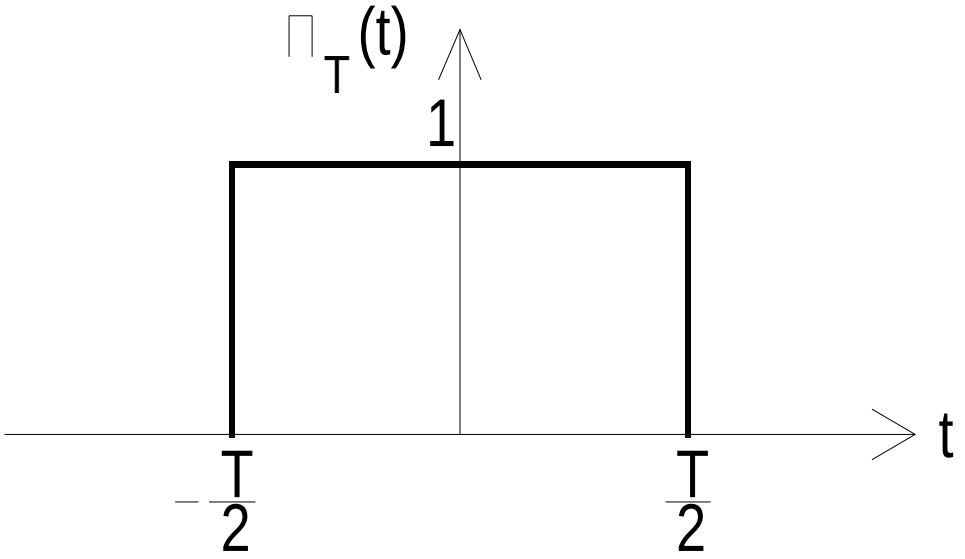


Weitere Signaleigenschaften

Determiniert	Stochastisch
mathematisch beschreibar	Verlauf ist nicht vorhersagbar
Beschränkt	**Unbeschränkt**
Es gibt keine Signalwerte im Unendlichen $\|s(t)\|<A$	Es gibt unendlich große Signalwerte
Periodisch	**Aperiodisch**
Wiederholung des Verlaufs nach einer Periodendauer $f(t)=f(t-T)$	Ein Signalwert kann nur einmal angenommen werden
Harmonisch	**Exponentiell**
= sinusförmig	Das Signal oder seine Amplitude entspricht der Exponential-Fkt

Elementarsignale - Rechteckfunktion

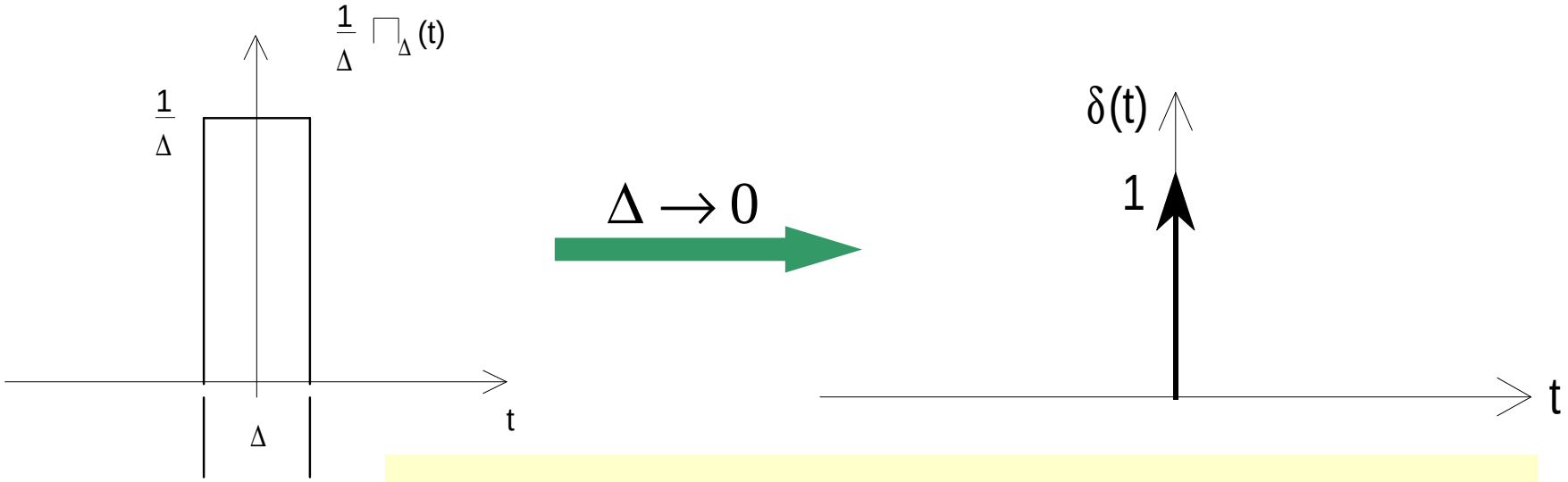
Mit der Rechteckfunktion können Impulse beschrieben werden. Sie ermöglicht die Eingrenzung (Ausblendung) eines Signals im Bereich T.



$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Elementarsignale - Deltaimpuls

Der Deltaimpuls (Dirac-Fkt) ist eine Testfunktion. Der Ausgang eines Systems reagiert auf den Deltaimpuls δ(t) mit der Impulsantwort g(t).

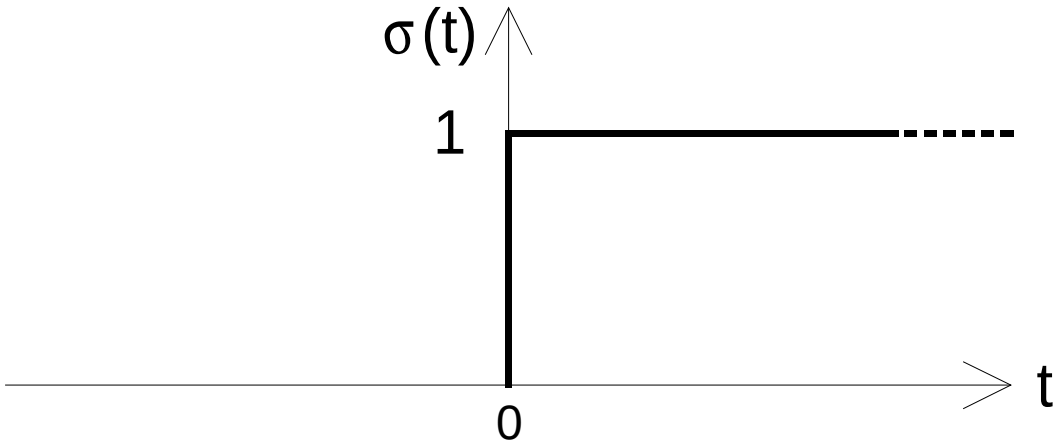


Flächeneigenschaft: $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

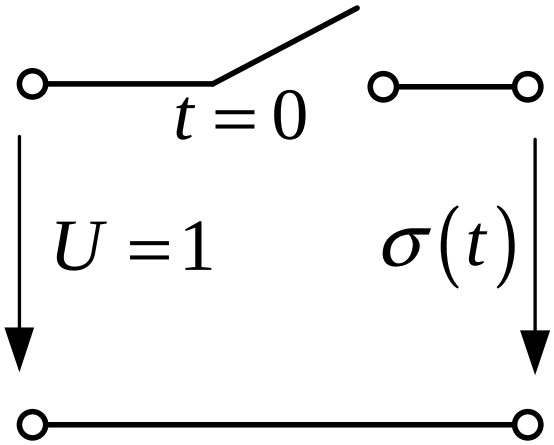
Ausblendeigenschaft: $$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\delta(t)\,dt = u(0)$$

Elementarsignale - Sprung

Der Einheitssprung ist eine Testfunktion. Der Ausgang eines Systems reagiert auf den Einheitssprung σ(t) mit der Sprungantwort h(t).

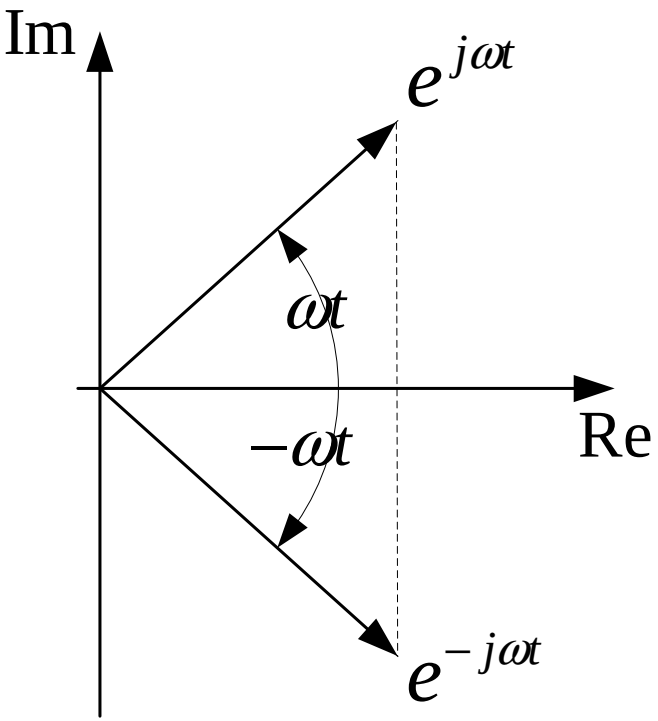


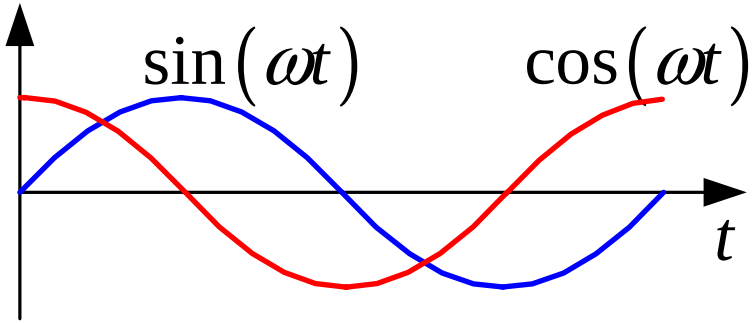
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Elementarsignale - Cosinus

Sinusförmige Signale spielen eine große Rolle in der Technik, weil sie beim Durchlaufen linearer Systeme (zB. Differentiation) ihre Form nicht ändern. Zudem sind sie einfach zu erzeugen.



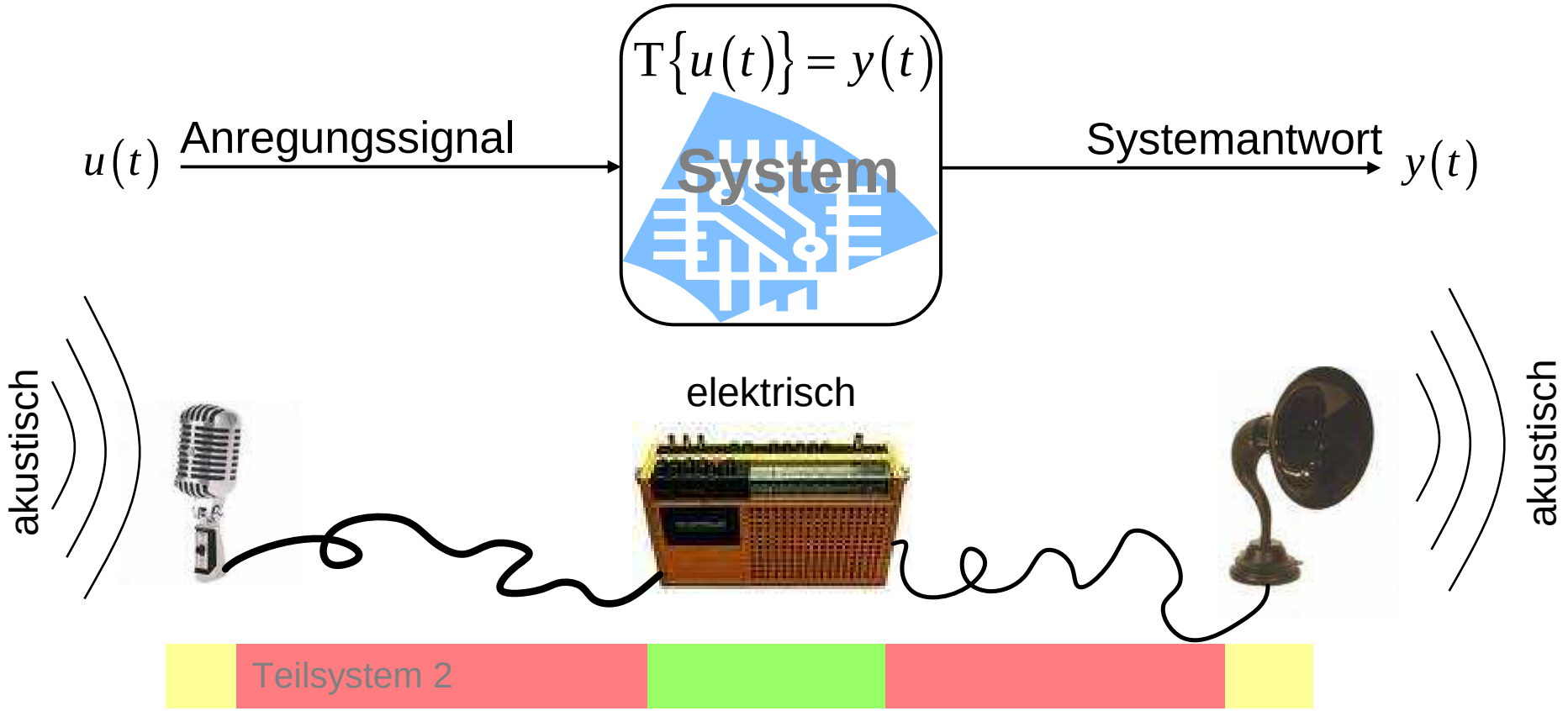


$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\right\}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\right\}$$

System

Die Beschreibung eines Systems hat zum Ziel vorherzusagen, wie sich Signale ändern, wenn sie das System durchlaufen. (T: Systemoperator)



Systemeigenschaften

Linearität

Eine Überlagerung von Eingangs-signalen führt am Ausgang zu einer Überlagerung der Einzelantworten

Superpositionsprinzip

$$\mathrm{T}\{a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Zeitinvarianz

Die Systemantwort hängt nicht vom Zeitpunkt des Anlegens des Eingangs-signals ab

$$\mathrm{T}\{u(t)\} = \mathrm{T}\{u(t + t_0)\}$$

Kausalität

Die Systemantwort tritt zeitgleich oder verzögert zum Eingangssignal auf

$$\text{Für } u(t) = 0 \text{ mit } t < t_0$$
$$\text{gilt } y(t) = 0 \text{ mit } t < t_0$$

Stabilität

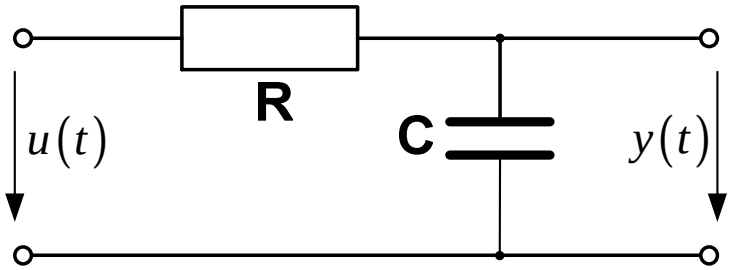
Das System antwortet auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal

BIBO-stabil:

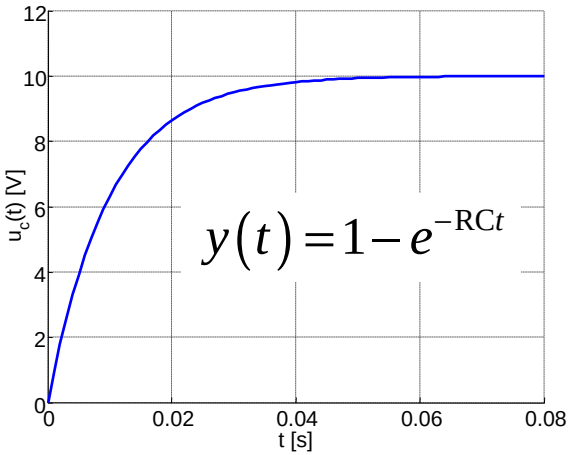
bounded input – bounded output

Darstellung von Systemen im Zeitbereich

Beispiel:



- Differentialgleichung ☑ → $u(t) = \mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$
- Sprungantwort ☑ →

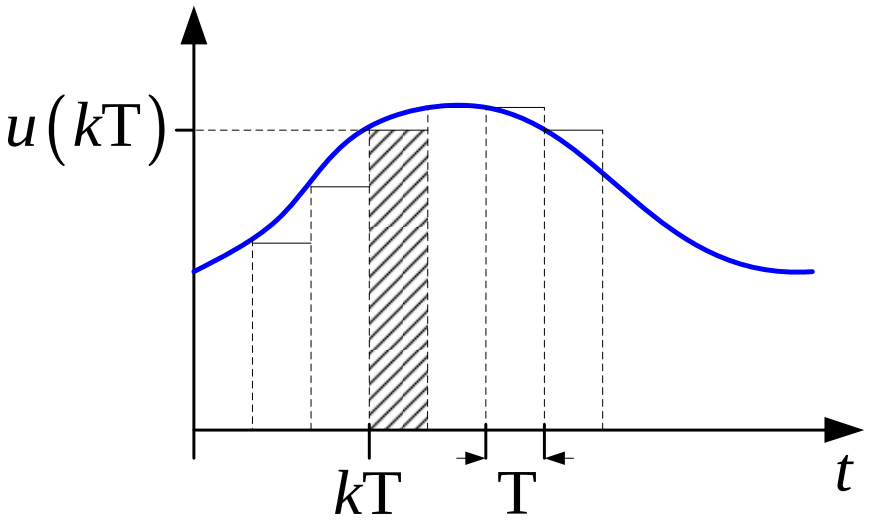


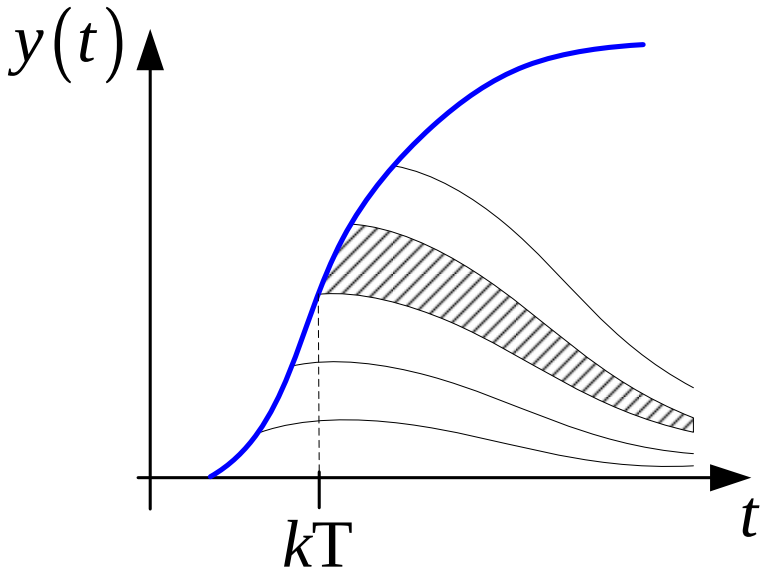
- Impulsantwort ?
- Faltung ?

Die Faltung

Mit dem Faltungsintegral kann y(t) für beliebige Eingangssignale u(t) als Faltung von u(t) mit der Impulsantwort g(t) angegeben werden.

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$



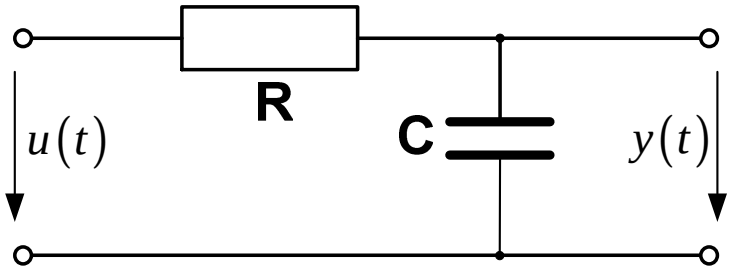


Transformationen

- Fourier-Transformation
  - Definition, Bedeutung, Anwendung
  - Modulationssatz, Faltung
- Laplace-Transformation
  - Lösen von Differentialgleichungen
  - Pol-, Nullstellendarstellung

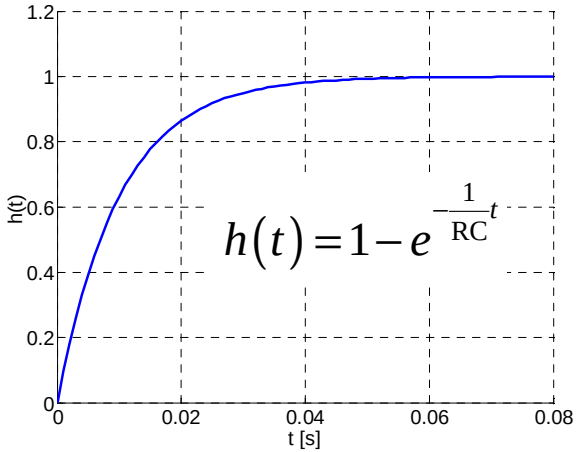
Darstellung von Systemen im Zeitbereich

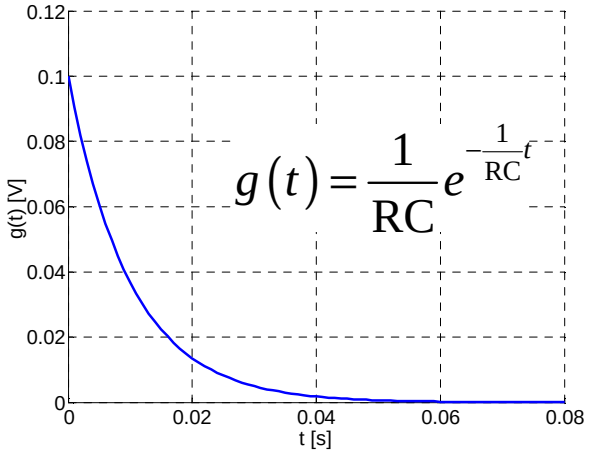
Beispiel:



- Differentialgleichung ☑ $u(t) = \mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$
- Sprungantwort ☑
- Impulsantwort ☑ $g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$
- Faltung ☑
- Vierpol ☑

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\omega \mathrm{C}}{1+j\omega \mathrm{RC}} & \frac{1}{1+j\omega \mathrm{RC}} \\ \frac{1}{1+j\omega \mathrm{RC}} & \frac{\mathrm{R}}{1+j\omega \mathrm{RC}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$





Fourier-Transformation

(Jean Baptiste Joseph Fourier 1822)

Mit der Fourier-Transformation wird ein Zeitsignal f(t) in ein Signal F(jω) im Frequenzbereich umkehrbar eindeutig abgebildet.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

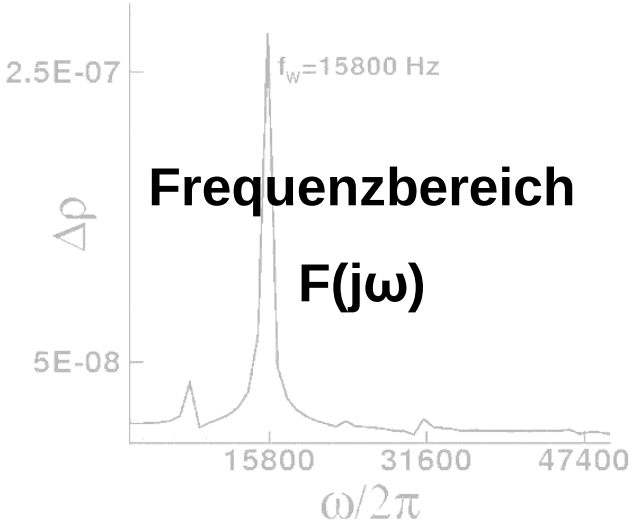
Fouriertransformation

Zeitbereich

f(t)

Inverse Fouriertransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

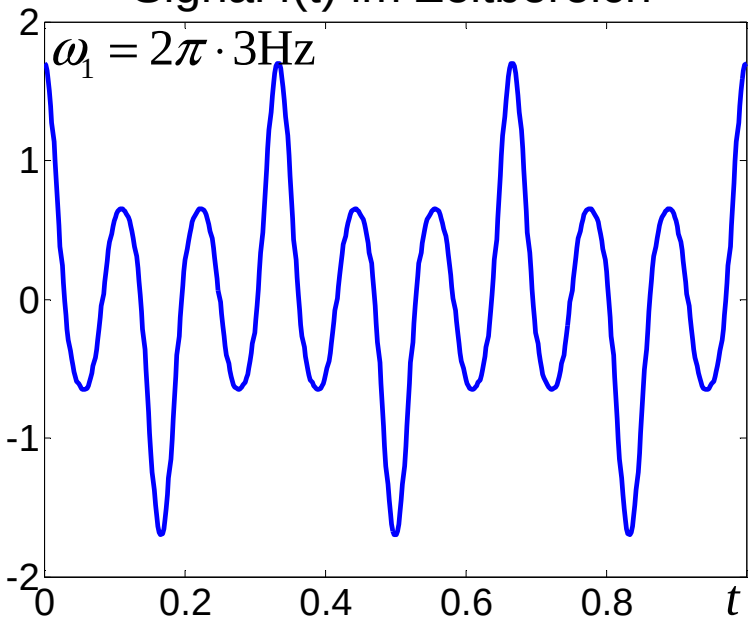


Frequenzbereich

F(jω)

Fourier-Transformation

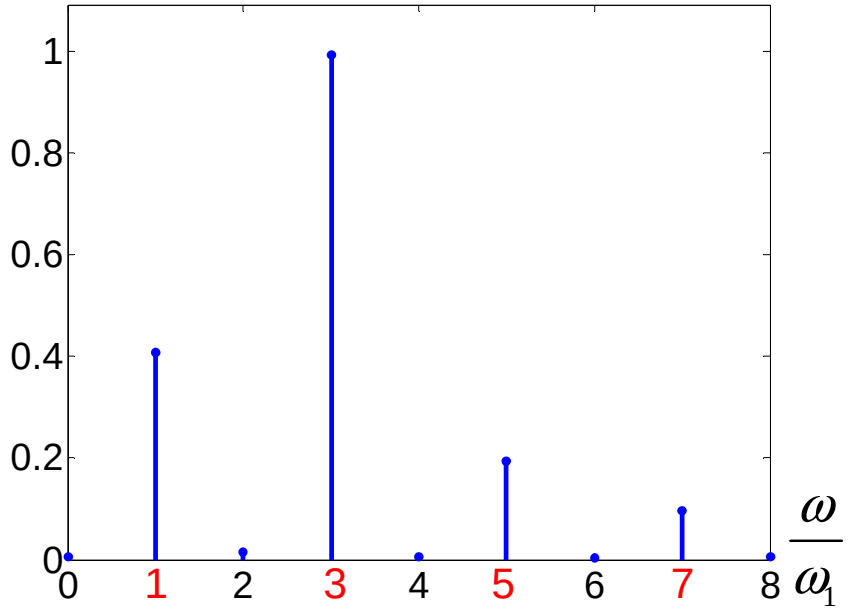
Signal f(t) im Zeitbereich



$$y(t) = 0.4 \cdot \cos(1\omega t) + 1.0 \cdot \cos(3\omega t) + 0.2 \cdot \cos(5\omega t) + 0.1 \cdot \cos(7\omega t)$$

$$f(t) \overset{F}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(j\omega)$$

Signal |F(jω)| im Frequenzbereich



Frequenzverschiebung - Modulationssatz

Modulation mit ω_0

Verschiebung des Spektrums um ω_0

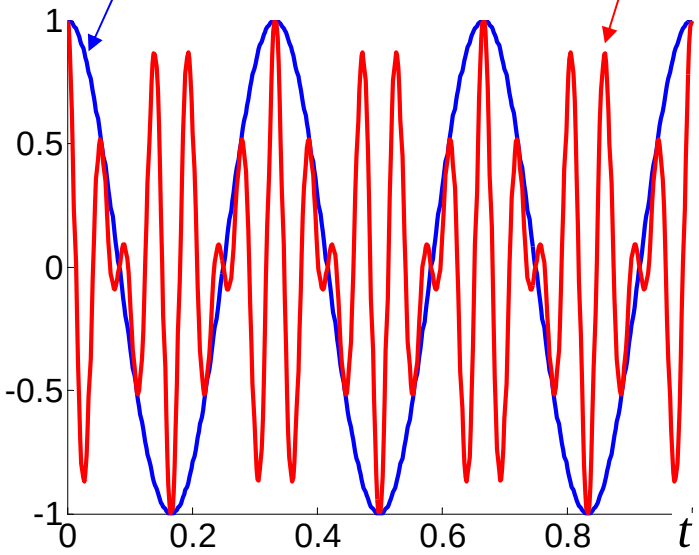
$$f(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet F(j\omega - j\omega_0)$$

Nutzsignal

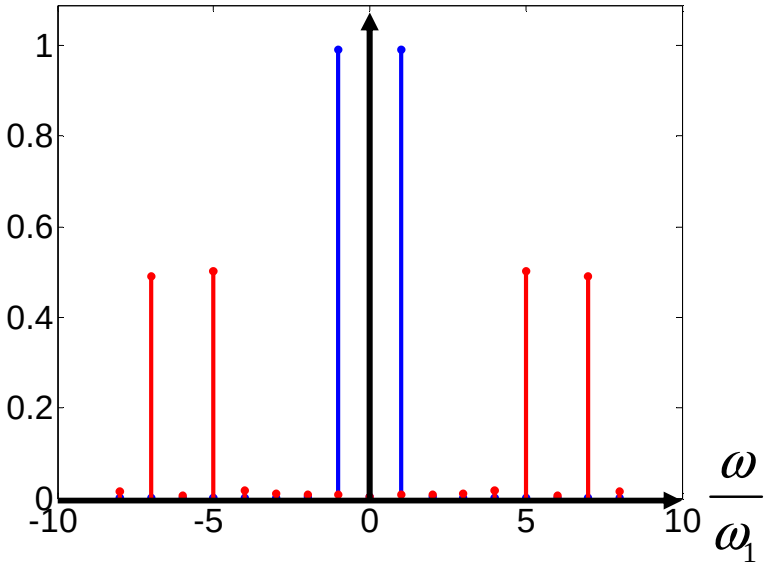
$u(t)=\cos(\omega t)$

Moduliertes Trägersignal

$y(t)=\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega_0 t)$



$\omega_0 = 6\omega$



Besondere Eigenschaften der Fourier-T.

Differentiationssatz

$$\frac{d}{dt} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j\omega \cdot F(j\omega)$$

Integrationssatz

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{j\omega} \cdot F(j\omega)$$

Anwendungs-Bsp: RC-Tiefpass

$$\begin{array}{ccccccc} u(t) & = & \mathrm{RC}\dfrac{dy(t)}{dt} & + & y(t) \\ \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet & & \circ\!\!-\!\!\bullet \\ U(\omega) & = & \mathrm{RC}\cdot j\omega Y(\omega) & + & Y(\omega) \end{array}$$

Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\mathrm{RC}}$$

Zeitverschiebung

$$f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

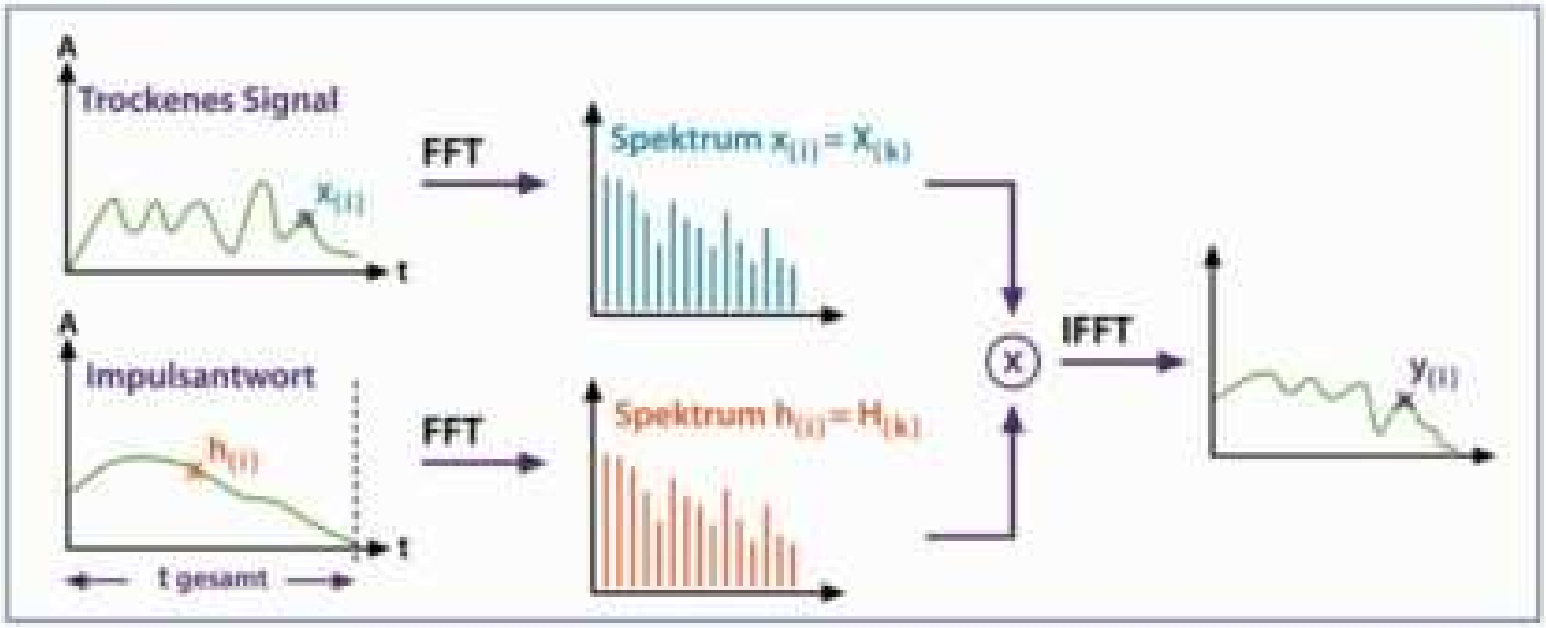
Amplituden der Einzelfrequenzen bleiben konstant. Lediglich die Phasenwinkel ändern sich!

Fourier-Transformation und Faltung

Faltungssatz

$$u(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(j\omega) \cdot G(j\omega)$$

<u>Anwendung in der Akustik:</u>
Einem Tonsignal kann damit eine bestimmte Klangfarbe gegeben werden.



Laplace-Transformation

(Pierre-Simon Laplace)

Die Laplace-Transformation ist eine einseitige Integraltransformation. Die Laplace-Transformierte existiert noch in vielen Fällen, wenn das Fourier-Integral bereits divergiert

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

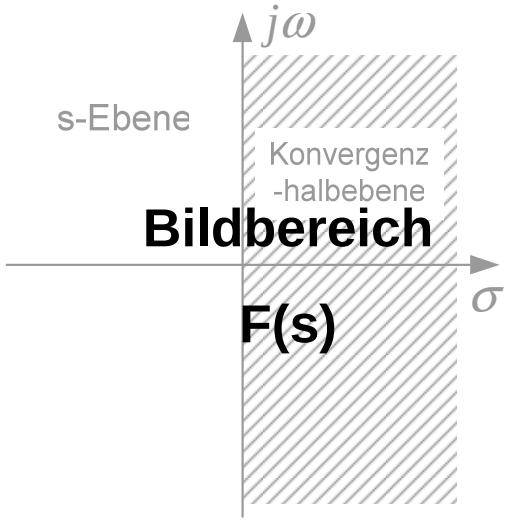
Laplacetransformation

Zeitbereich

f(t)

Inverse Laplacetransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$



DGL lösen mit Laplace-Transformation

Mit der Laplace-Transformation kann eine lineare Differentialgleichung im Zeitbereich durch eine algebraische Gleichung im Bildbereich dargestellt werden. Nach Lösung im Bildbereich wird zurücktransform.

Zeitbereich

Bildbereich

$$\hat{u} \cdot \sigma(t) = \mathrm{RC} \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Transformation

$$\hat{u} \frac{1}{s} = \mathrm{RC} \cdot sY(s) + Y(s)$$

Lösung

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{\mathrm{RC}}}{s\left(s + \frac{1}{\mathrm{RC}}\right)} \hat{u}$$

Rücktransformation

$$y(t) = \hat{u} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{\mathrm{RC}} t})$$

Pol-Nullstellen Darstellung

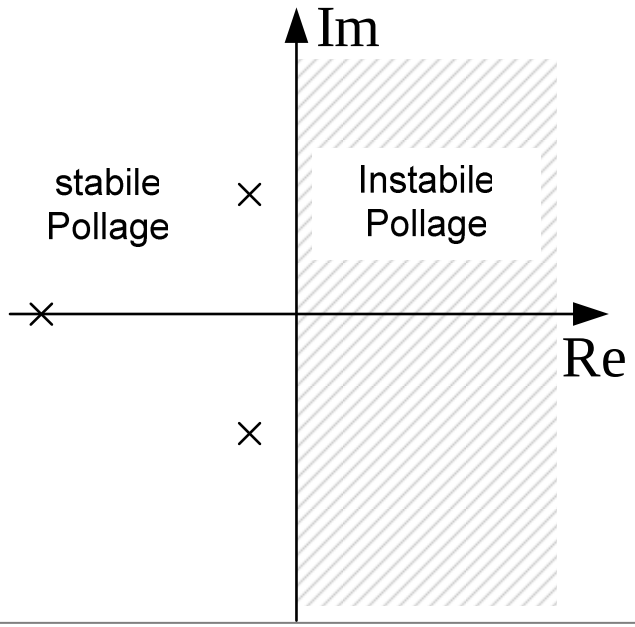
Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion ermöglichen eine anschauliche Interpretation der dynamischen Eigenschaften eines Syst.

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

Partialbruchzerlegung

$$= \frac{A}{(s - p_1)} + \frac{B}{(s - p_2)} + \frac{C}{(s - p_3)}$$



$$g(t) = A \cdot e^{p_1 t} + B \cdot e^{p_2 t} + C \cdot e^{p_3 t}$$

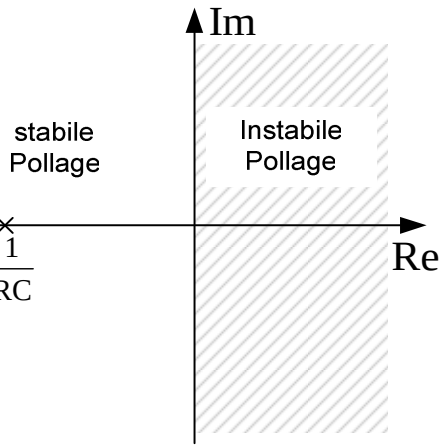
$$\mathrm{Re}\{p_1\} \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{instabil} \\ < 0 & \text{stabil} \end{cases}$$

Darstellung von Systemen im Frequenzbereich

Anwendungs-Bsp: RC-Tiefpass

- Übertragungsfunktion ☑
- Fouriertransformation ☑
- Laplacetransformation ☑
- Pol- und Nullstellen ☑

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega \mathrm{RC}}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s\mathrm{RC}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{\mathrm{RC}}}{s - \left(-\frac{1}{\mathrm{RC}}\right)}$$